

Αναλυτική Θεωρία Αριθμών

Σημειώσεις από τις Διαλέξεις

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο, 2026

Περιεχόμενα

1	Η πρώτη αναγωγή	1
1.1	Άθροιση κατά Abel	1
1.2	Ένα φυσικό αντικείμενο: Mellin-τύπου ολοκλήρωμα	6
1.3	Η σύνδεση με την συνάρτηση Mangoldt	6
1.4	Σύνδεση με την συνάρτηση ζ	7
1.5	Συμπέρασμα	8
2	Επέκταση του Ορισμού της συνάρτησης ζ	10
2.1	Μερομορφική συνέχεια της $\zeta(s)$ στο $\Re(s) > 0$	13
3	Βασικά για μιγαδικούς αριθμούς και σύνολα στο $\mathbb{C}$	14
3.1	Σύγκλιση στο $\mathbb{C}$	15
3.2	Σειρές μιγαδικών αριθμών	15
3.3	Ομοιόμορφη σύγκλιση	15
4	Η εκθετική και μιγαδικές δυνάμεις	16
5	Ολόμορφες συναρτήσεις και αναλυτική συνέχιση	16
5.1	Τοπολογικές Έννοιες	16
6	Μιγαδικά ολοκληρώματα	18
6.1	Ορισμός και βασική εκτίμηση	18
6.2	Θεώρημα και τύπος Cauchy	18
6.3	Παραμόρφωση διαδρομής (homotopy invariance)	19
6.4	Ένα μικρό λήμμα συμπαγότητας	19
7	Αναλυτικές συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκληρώματα	19

1 Η πρώτη αναγωγή

1.1 Άθροιση κατά Abel

Θεώρημα 1.1 (Άθροιση κατά Abel). Έστω $0 < y < x$ πραγματικοί αριθμοί και $f : [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(a_n)_{n \geq 1}$ και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε

$$A(t) := \sum_{n \leq t} a_n.$$

Τότε ισχύει

$$\sum_{y < n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) dt.$$

Θεώρημα 1.2 (Τύπος άθροισης Euler). Έστω $0 < y < x$ πραγματικοί αριθμοί και $f : [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο f' στο $[y, x]$. Τότε

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x \{t\} f'(t) dt + \{y\} f(y) - \{x\} f(x),$$

όπου $\{t\} = t - [t]$ είναι το κλασματικό μέρος.

Οι παρακάτω δύο εφαρμογές είναι χαρακτηριστικές για το πώς χρησιμοποιούμε τον τύπο άθροισης.

Θεώρημα 1.3. Για $x \geq 1$ ισχύει

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right), \quad (1)$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler, οριζόμενη από

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

Επιπλέον,

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.2 για την συνάρτηση $f(t) = 1/t$ και $y = 1$. Τότε $\{1\} = 0$ και $f'(t) = -1/t^2$, άρα

$$\sum_{1 < n \leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^x \{t\} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt - \{x\} \frac{1}{x}.$$

Επομένως

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = 1 + \log x - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε $\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt$:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \left(1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt\right) + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Ορίζοντας $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt$ παίρνουμε

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Τώρα $0 \leq \{t\} \leq 1$, άρα

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x}, \quad 0 \leq \frac{\{x\}}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Άρα το υπόλοιπο είναι $\mathcal{O}(1/x)$ και προκύπτει η (1). Τέλος, καθώς $x \rightarrow \infty$ το $\mathcal{O}(1/x)$ τείνει στο 0, οπότε

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \rightarrow \gamma,$$

δηλαδή $\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right)$. □

Ορισμοί

Για $x \geq 0$ θέτουμε:

$$\pi(x) := \#\{p \leq x : p \text{ πρώτος}\}, \quad \theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p,$$

και

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p,$$

όπου Λ είναι η συνάρτηση von Mangoldt: $\Lambda(n) = \log p$ αν $n = p^k$ για κάποιον πρώτο p και $k \geq 1$, και $\Lambda(n) = 0$ αλλιώς.

Θεώρημα 1.4. Για κάθε $x \geq 2$ ισχύουν οι ταυτότητες

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

και

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1 με $y = 2$,

$$a_n = \mathbf{1}_{\{n \text{ πρώτος}\}}, \quad f(t) = \log t, \quad A(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \pi(t).$$

Τότε

$$\sum_{2 < n \leq x} a_n f(n) = \sum_{2 < p \leq x} \log p = \theta(x) - \log 2.$$

Το Θεώρημα 1.1 δίνει

$$\theta(x) - \log 2 = \pi(x) \log x - \pi(2) \log 2 - \int_2^x \pi(t) \frac{dt}{t}.$$

Επειδή $\pi(2) = 1$, οι όροι $\log 2$ απαλείφονται, και παίρνουμε

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt.$$

Εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα 1.1 με $y = 2$,

$$a_n = (\log n) \mathbf{1}_{\{n \text{ πρώτος}\}}, \quad f(t) = \frac{1}{\log t}, \quad A(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \theta(t).$$

Τότε

$$\sum_{2 < n \leq x} a_n f(n) = \sum_{2 < p \leq x} \frac{\log p}{\log p} = \pi(x) - 1,$$

επομένως

$$\pi(x) - 1 = \theta(x) \frac{1}{\log x} - \theta(2) \frac{1}{\log 2} - \int_2^x \theta(t) f'(t) dt.$$

Επειδή $\theta(2) = \log 2$, ο όρος $\theta(2)/\log 2$ είναι 1 και απαλείφεται με το -1 αριστερά. Επίσης

$$f'(t) = \left(\frac{1}{\log t} \right)' = -\frac{1}{t(\log t)^2}.$$

Άρα

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt.$$

□

Θεώρημα 1.5. Για κάθε $x \geq 1$ ισχύει

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq \frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{2 \log 2}. \quad (2)$$

Ειδικότερα, για $x \geq 2$ έχουμε

$$\psi(x) = \theta(x) + O(\sqrt{x}(\log x)^2).$$

Απόδειξη. Η ανισότητα $\psi(x) - \theta(x) \geq 0$ είναι άμεση, αφού η ψ περιλαμβάνει όλους τους όρους της θ και επιπλέον τις συνεισφορές από πρώτες δυνάμεις p^k με $k \geq 2$.

Για το άνω φράγμα, ξεκινάμε από τον ορισμό

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \Lambda(p^k).$$

Ομαδοποιώντας ως προς τον εκθέτη k παίρνουμε

$$\psi(x) = \sum_{k \geq 1} \sum_{p \leq x^{1/k}} \log p = \sum_{k \geq 1} \theta(x^{1/k}).$$

Το άθροισμα ως προς k είναι στην πράξη πεπερασμένο, διότι $\theta(y) = 0$ όταν $y < 2$ (δεν υπάρχουν πρώτοι ≤ 1). Άρα $\theta(x^{1/k}) = 0$ για $x^{1/k} < 2$, δηλαδή για

$$k > \frac{\log x}{\log 2}.$$

Συνεπώς

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{k \geq 2} \theta(x^{1/k}) = \sum_{2 \leq k \leq \log x / \log 2} \theta(x^{1/k}).$$

Για $k \geq 2$ έχουμε $x^{1/k} \leq \sqrt{x}$, άρα (μονοτονία της θ)

$$\theta(x^{1/k}) \leq \theta(\sqrt{x}) \quad \text{για κάθε } k \geq 2.$$

Επομένως

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \theta(\sqrt{x}) \cdot \frac{\log x}{\log 2}.$$

Τέλος,

$$\theta(\sqrt{x}) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log \sqrt{x} \leq \sqrt{x} \log \sqrt{x}.$$

Άρα

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \sqrt{x} \log \sqrt{x} \cdot \frac{\log x}{\log 2} = \sqrt{x} \cdot \frac{(\log x)^2}{2 \log 2},$$

που είναι ακριβώς το (2). □

Λήμμα 1.6. Για $x \geq 3$ ισχύει

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{C_1 x}{\log x}, \quad \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{C_2 x}{(\log x)^2}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Για $t \in [u, x]$ έχουμε $\log t \geq \log u = \frac{1}{2} \log x$. Άρα

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^u \frac{dt}{\log t} + \int_u^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{u-2}{\log 2} + \frac{x-u}{\frac{1}{2} \log x} = \mathcal{O}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\log x}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Ομοίως,

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq u + \frac{x-u}{(\frac{1}{2} \log x)^2} \ll \sqrt{x} + \frac{x}{(\log x)^2} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

□

Θεώρημα 1.7. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad (3)$$

$$\theta(x) \sim x, \quad (4)$$

$$\psi(x) \sim x. \quad (5)$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.4 έχουμε, για $x \geq 2$,

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt.$$

Διαιρώντας με x και γράφοντας $\frac{\pi(x) \log x}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\log x}$ παίρνουμε

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\log x} - \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt. \quad (6)$$

(3) $\implies$ (4). Υποθέτουμε ότι $\pi(x) \sim x/\log x$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για t μεγάλα

$$\pi(t) \leq C \frac{t}{\log t}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \ll \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log t} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \longrightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Επιστρέφοντας στην (6) και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \rightarrow 1$, παίρνουμε $\frac{\theta(x)}{x} \rightarrow 1$, δηλαδή $\theta(x) \sim x$.

(4) $\implies$ (3). Από το Θεώρημα 1.4 έχουμε επίσης

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt,$$

άρα

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt. \quad (7)$$

Υποθέτουμε $\theta(x) \sim x$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για t μεγάλα $\theta(t) \leq Ct$. Έτσι

$$\frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt \ll \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Στην (7) λοιπόν, ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 και ο πρώτος τείνει στο 1, οπότε $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \rightarrow 1$, δηλαδή $\pi(x) \sim x/\log x$.

(5) $\iff$ (4). Από το Θεώρημα 1.5 ισχύει $0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq C\sqrt{x}(\log x)^2$ για $x \geq 2$. Διαιρώντας με x παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \right) = 0.$$

Άρα $\theta(x) \sim x$ αν και μόνο αν $\psi(x) \sim x$.

Συμπεραίνουμε ότι (3), (4), (5) είναι ισοδύναμες. $\square$

Εφόσον θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\psi(x) \sim x$, κάνουμε την πρώτη βασική αναγωγή, με βάση το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.8 (Korevaar–Zagier). Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία με $a_n \geq 0$ και ορίζουμε, για $x \geq 1$,

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n.$$

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{A(x) - x}{x^2} dx$$

συγκλίνει, τότε $A(x) \sim x$, καθώς $x \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$I(y) = \int_y^\infty \frac{A(t) - t}{t^2} dt.$$

Η υπόθεση ότι $\int_1^\infty \frac{A(t) - t}{t^2} dt$ συγκλίνει ισοδυναμεί με $I(y) \rightarrow 0$. Θα αποδείξουμε ότι $A(x)/x \rightarrow 1$.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $\limsup_{x \rightarrow \infty} A(x)/x > 1$. Τότε υπάρχει $\lambda > 1$ και άπειρα x με $A(x) \geq \lambda x$. Για τέτοιο x και κάθε $t \in [x, \lambda x]$ ισχύει $A(t) \geq A(x) \geq \lambda x$, άρα

$$I(x) - I(\lambda x) = \int_x^{\lambda x} \frac{A(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = vx$ παίρνουμε

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - v}{v^2} dv = \lambda - 1 - \log \lambda > 0.$$

Όμως $I(x) \rightarrow 0$ και $I(\lambda x) \rightarrow 0$, άρα $I(x) - I(\lambda x) \rightarrow 0$, άτοπο. Ανάλογα αποκλείεται και η σχέση $\liminf_{x \rightarrow \infty} A(x)/x < 1$. Άρα $A(x)/x \rightarrow 1$. $\square$

1.2 Ένα φυσικό αντικείμενο: Mellin–τύπου ολοκλήρωμα

Για $\sigma > 1$ ορίζουμε

$$F(\sigma) := \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^{\sigma+1}} dx. \quad (8)$$

Τυπικά,

$$F(1) = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx,$$

άρα το ερώτημα είναι αν το $F(\sigma)$ μπορεί να «κατέβει» μέχρι $\sigma = 1$ με πεπερασμένη τιμή. Προς το παρόν εργαζόμαστε μόνο στο $\sigma > 1$, όπου όλα είναι απολύτως νόμιμα.

1.3 Η σύνδεση με την συνάρτηση Mangoldt

Λήμμα 1.9. Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ και επειδή $\Lambda(n) \geq 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε Tonelli και να ανταλλάξουμε άθροισμα–ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}} dx &= \int_1^\infty \left(\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \right) x^{-\sigma-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_1^\infty \mathbf{1}_{\{n \leq x\}} x^{-\sigma-1} dx = \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_n^\infty x^{-\sigma-1} dx. \end{aligned}$$

Για $\sigma > 0$ έχουμε

$$\int_n^\infty x^{-\sigma-1} dx = \frac{1}{\sigma} n^{-\sigma},$$

οπότε παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Επιπλέον για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^{\sigma+1}} dx = \int_1^\infty x^{-\sigma} dx = \frac{1}{\sigma-1},$$

επομένως παίρνουμε την ακόλουθη ισότητα.

Πρόταση 1.10. Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} - \frac{1}{\sigma-1}. \quad (9)$$

Άρα το πρόβλημά μας μεταφέρθηκε φυσικά στη μελέτη της σειράς Dirichlet

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

1.4 Σύνδεση με την συνάρτηση ζ

Εισάγουμε την συνάρτηση ζ ως σειρά Dirichlet:

$$\zeta(\sigma) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma} \quad (\sigma > 1). \quad (10)$$

Λήμμα 1.11 (Παραγωγή της ζ για $\sigma > 1$). Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$\zeta'(\sigma) = - \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ η σειρά $\sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}}$ συγκλίνει, οπότε η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1+\varepsilon, \infty)$ (Weierstrass M -test). Άρα επιτρέπεται η παραγωγή της (10) για $\sigma > 1$. $\square$

Το κρίσιμο αριθμητικό γεγονός είναι μια ταυτότητα για τη von Mangoldt συνάρτηση.

Λήμμα 1.12 (Ταυτότητα διαιρετών για Λ). Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ ισχύει

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \quad (11)$$

Απόδειξη. Αν $n = \prod_{j=1}^m p_j^{\alpha_j}$, τότε $\log n = \sum_{j=1}^m \alpha_j \log p_j$. Οι διαιρέτες d του n με $\Lambda(d) \neq 0$ είναι ακριβώς οι δυνάμεις p_j^k με $1 \leq k \leq \alpha_j$, άρα

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\alpha_j} \log p_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \log p_j = \log n.$$

□

Λήμμα 1.13. Για κάθε $\sigma > 1$ η σειρά $\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$ συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη. Ισχύει $\Lambda(n) \leq \log n$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \infty \quad (\sigma > 1).$$

□

Θεώρημα 1.14. Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}. \quad (12)$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.11 έχουμε

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα (11):

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Για $\sigma > 1$ όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί, οπότε (Tonelli) αναδιατάσσουμε:

$$\begin{aligned} -\zeta'(\sigma) &= \sum_{d=1}^{\infty} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ d|n}} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{d=1}^{\infty} \Lambda(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(dm)^\sigma} \\ &= \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^\sigma} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\sigma} \right) = \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^\sigma} \right) \zeta(\sigma). \end{aligned}$$

Επειδή $\zeta(\sigma) > 0$ για $\sigma > 1$, διαιρούμε και παίρνουμε την (12). □

1.5 Συμπέρασμα

Συνδυάζοντας την Πρόταση 1.10 με το Θεώρημα 1.14 παίρνουμε, για κάθε $\sigma > 1$,

$$F(\sigma) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{\sigma - 1}. \quad (13)$$

Ξεκινήσαμε από τη ψ και το κριτήριο Korevaar–Zagier, και φτάσαμε στο ότι η μελέτη της σύγκλισης του (??) ισοδυναμεί με το να καταλάβουμε τη συμπεριφορά του δεξιού μέλους του (13) καθώς $\sigma \downarrow 1$.

Γιατί αναγκαστικά θα περάσουμε σε μιγαδική ανάλυση.

Παρατήρηση 1.15 (Γιατί δεν αρκεί να μείνουμε στο $\sigma \in \mathbb{R}$). Μέχρι εδώ δουλέψαμε μόνο με πραγματικά $\sigma > 1$. Το επόμενο βήμα θα ήταν να περάσουμε στο

$$F(1) = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx,$$

αλλά αυτό δεν προκύπτει μόνο από τη γνώση του $F(\sigma)$ για $\sigma > 1$. Πράγματι, αν πάρουμε

$$E(x) := x \sin(\log x), \quad F_E(\sigma) := \int_1^\infty \frac{E(x)}{x^{\sigma+1}} dx = \int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x^\sigma} dx,$$

με την αλλαγή μεταβλητής $u = \log x$ προκύπτει

$$F_E(\sigma) = \int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u \, du = \frac{1}{(\sigma-1)^2 + 1},$$

άρα $\lim_{\sigma \downarrow 1} F_E(\sigma) = 1$. Πράγματι, ένας γρήγορος τρόπος για τον τελευταίο υπολογισμό είναι

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u \, du = \Im \int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} e^{iu} \, du = \Im \int_0^\infty e^{-(\sigma-1-i)u} \, du.$$

Για $\sigma > 1$ έχουμε $\Re(\sigma-1-i) = \sigma-1 > 0$, άρα

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1-i)u} \, du = \frac{1}{\sigma-1-i}.$$

Επομένως

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u \, du = \Im \frac{1}{\sigma-1-i} = \Im \left(\frac{\sigma-1+i}{(\sigma-1)^2+1} \right) = \frac{1}{(\sigma-1)^2+1}.$$

Ωστόσο

$$F_E(1) = \int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x} dx = \int_0^\infty \sin u \, du,$$

που δεν συγκλίνει. Δηλαδή: ακόμη και πολύ καλή συμπεριφορά για όλα τα $\sigma > 1$ (και μάλιστα υπαρκτή ορίου στο $\sigma \downarrow 1$) δεν εγγυάται σύγκλιση στο $\sigma = 1$.

Η σωστή πρόσθετη πληροφορία είναι να ελέγξουμε την *οριακή ευθεία* $\Re(s) = 1$, δηλαδή τι συμβαίνει για $s = \sigma + it$. Στο παραπάνω παράδειγμα, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι

$$F_E(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1},$$

που έχει πόλους στα $s = 1 \pm i$, δηλαδή πάνω στην $\Re(s) = 1$. Αυτές οι ανωμαλίες αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις και είναι ακριβώς αυτό που πρέπει να αποκλείσουμε στην περίπτωση της ζ .

2 Επέκταση του Ορισμού της συνάρτησης ζ

Λήμμα 2.1. Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ με $a_n \in \mathbb{C}$ και έστω

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it.$$

Αν υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} < \infty$, τότε για κάθε $\sigma_1 > \sigma_0$ η σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq \sigma_1$. Επιπλέον, η F είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > \sigma_0$ και

$$F'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε $\Re(s) \geq \sigma_1 > \sigma_0$.

Απόδειξη. Για s με $\Re(s) = \sigma \geq \sigma_1$ έχουμε

$$\left| \frac{a_n}{n^s} \right| = \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}}.$$

Επειδή $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}} < \infty$, το M -κριτήριο του Weierstrass δίνει ομοιόμορφη σύγκλιση στο $\Re(s) \geq \sigma_1$. Άρα η F είναι συνεχής εκεί.

Για την ολομορφία, παρατηρούμε ότι κάθε όρος $s \mapsto a_n n^{-s} = a_n e^{-s \log n}$ είναι ολόμορφη και για $\sigma \geq \sigma_1$ ισχύει

$$\left| \frac{a_n \log n}{n^s} \right| = \frac{|a_n| \log n}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n| \log n}{n^{\sigma_1}}.$$

Αλλά για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\log n \leq n^\varepsilon$ για n αρκετά μεγάλο, οπότε (π.χ. παίρνοντας $\varepsilon = (\sigma_1 - \sigma_0)/2$) η $\sum \frac{|a_n| \log n}{n^{\sigma_1}}$ συγκλίνει. Άρα η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα όταν $\Re(s) \geq \sigma_1$. Από το Θεώρημα 5.7 συμπεραίνουμε ότι F είναι ολόμορφη και ότι επιτρέπεται παραγωγίσιμη όρο-όρο. $\square$

Πρόταση 2.2. Για $\Re(s) > 1$ ορίζουμε

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως για $\Re(s) > 1$, ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο $\{s : \Re(s) > 1\}$, και για κάθε $\Re(s) > 1$ ισχύει

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq 1 + \delta$ ($\delta > 0$).

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 με $a_n \equiv 1$ και $\sigma_0 = 1$. $\square$

Παρατήρηση 2.3. Θέτουμε $H_1 := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο H_1 .

Πράγματι, έστω προς άτοπο ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο H_1 . Τότε, από το κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\ell > k \geq N$ και κάθε $s \in H_1$ να ισχύει

$$\left| \sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n^s} \right| < 1.$$

Ειδικότερα, αυτό ισχύει για κάθε πραγματικό $s > 1$ (αφού $(1, \infty) \subset H_1$). Για πραγματικό $s > 1$ όλοι οι όροι είναι θετικοί, άρα

$$\sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n^s} < 1 \quad (\ell > k \geq N, s > 1).$$

Αφήνοντας τώρα $s \rightarrow 1^+$, και χρησιμοποιώντας ότι για κάθε σταθερά ℓ, k έχουμε $\frac{1}{n^s} \rightarrow \frac{1}{n}$, παίρνουμε

$$\sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n} \leq 1 \quad (\ell > k \geq N).$$

Τέλος, αφήνοντας $\ell \rightarrow \infty$ καταλήγουμε ότι

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 1 \quad (k \geq N),$$

άτοπο, επειδή η αρμονική σειρά αποκλίνει. Άρα η αρχική υπόθεση είναι ψευδής.

Πρόταση 2.4. *Θέτουμε*

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Τότε η F είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$, και

$$F'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε $\Re(s) \geq 1 + \delta$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ότι $0 \leq \Lambda(n) \leq \log n$ για κάθε $n \geq 2$. Για $\sigma > 1$ έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^{\sigma}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}} < \infty,$$

άρα εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 με $\sigma_0 = 1$. □

Πρόταση 2.5. *Θεωρούμε το ημιεπίπεδο $\Omega := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε πραγματικό $s > 1$ έχει ήδη αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Τότε η ίδια ταυτότητα ισχύει για κάθε μιγαδικό $s \in \Omega$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2 η ζ και η ζ' είναι ολόμορφες στο Ω . Από την Πρόταση 2.4 η

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

είναι ολόμορφη στο Ω . Άρα και το γινόμενο $\zeta(s)F(s)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο Ω .

Ορίζουμε την ολόμορφη συνάρτηση

$$H(s) := -\zeta'(s) - \zeta(s)F(s) \quad (s \in \Omega).$$

Από την υπόθεση, για κάθε πραγματικό $s > 1$ ισχύει $H(s) = 0$. Το σύνολο $(1, \infty) \subset \Omega$ έχει σημείο συσσώρευσης εντός του Ω (π.χ. στο $s = 2$), άρα από την Αρχή Αναλυτικής Συνέχισης (Identity Theorem) συμπεραίνουμε ότι $H \equiv 0$ σε όλο το Ω . Δηλαδή

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

για κάθε $s \in \Omega$.

□

Λήμμα 2.6. Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $s_0 \in \Omega$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη. Υποθέτουμε ότι $f \not\equiv 0$ και ότι $f(s_0) = 0$. Τότε υπάρχει ακέραιος $m \geq 1$ και ολόμορφη συνάρτηση h σε κάποια γειτονιά του s_0 με $h(s_0) \neq 0$ τέτοια ώστε

$$f(s) = (s - s_0)^m h(s)$$

για s κοντά στο s_0 . Ο m είναι μοναδικός και λέγεται τάξη (ή πολλαπλότητα) του μηδενικού στο s_0 .

Απόδειξη. Επειδή f είναι ολόμορφη, υπάρχει $r > 0$ και ανάπτυγμα Taylor

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \quad (|s - s_0| < r).$$

Από $f(s_0) = 0$ παίρνουμε $a_0 = 0$. Επειδή $f \not\equiv 0$, δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν, άρα υπάρχει ελάχιστος $m \geq 1$ με $a_m \neq 0$. Τότε

$$f(s) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (s - s_0)^n = (s - s_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (s - s_0)^k.$$

Θέτουμε

$$h(s) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (s - s_0)^k.$$

Η h είναι ολόμορφη στο $|s - s_0| < r$ και $h(s_0) = a_m \neq 0$. Η μοναδικότητα του m προκύπτει από τη μοναδικότητα του Taylor αναπτύγματος. □

Θεώρημα 2.7. Για κάθε s με $\Re(s) > 1$ ισχύει $\zeta(s) \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει s_0 με $\Re(s_0) > 1$ και $\zeta(s_0) = 0$. Η ζ είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$, άρα το s_0 είναι μηδενικό κάποιας τάξης $m \geq 1$, δηλαδή υπάρχει ολόμορφη h κοντά στο s_0 με $h(s_0) \neq 0$ ώστε

$$\zeta(s) = (s - s_0)^m h(s).$$

Τότε

$$\zeta'(s) = m(s - s_0)^{m-1}h(s) + (s - s_0)^m h'(s),$$

οπότε η $\zeta'(s)$ έχει μηδενικό ακριβώς τάξης $m-1$ στο s_0 . Ισοδύναμα, $-\zeta'(s)$ έχει μηδενικό ακριβώς τάξης $m-1$ στο s_0 .

Από την Πρόταση 2.5 έχουμε στο $\Re(s) > 1$ την ταυτότητα

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) F(s), \quad F(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Η F είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$ (από απόλυτη σύγκλιση), άρα κοντά στο s_0 είναι πεπερασμένη. Επομένως το γινόμενο $\zeta(s)F(s)$ έχει μηδενικό τάξης τουλάχιστον m στο s_0 , αφού η ζ έχει τάξη m εκεί.

Άρα το αριστερό μέλος $-\zeta'(s)$ θα έπρεπε να έχει μηδενικό τάξης $\geq m$ στο s_0 , που αντιφάσκει με το ότι έχει τάξη ακριβώς $m-1$. Άτοπο. Συνεπώς $\zeta(s) \neq 0$ για $\Re(s) > 1$. $\square$

2.1 Μερομορφική συνέχεια της $\zeta(s)$ στο $\Re(s) > 0$

Θεώρημα 2.8. Για $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma = \Re(s) > 1$ ισχύει

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Απόδειξη. Απ τον τύπο αθροίσεως του Euler, παίρνουμε

$$\sum_{n \leq x} n^{-s} = 1 + \int_1^x t^{-s} dt + \int_1^x \{t\} (t^{-s})' dt - \frac{\{x\}}{x^s}.$$

Υπολογίζοντας τα παραπάνω ολοκληρώματα καταλήγουμε στην ισότητα

$$\sum_{n \leq x} n^{-s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \frac{s}{s-1} - \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Περνώντας στο όριο $x \rightarrow \infty$ (και χρησιμοποιώντας ότι $\sigma > 1$ ώστε $x^{1-s} \rightarrow 0$ και $\{x\}/x^s \rightarrow 0$), παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 2.9. Η σχέση του Θεωρήματος 2.8 δίνει αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ στο ημιεπίπεδο $\sigma > 0$, με απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο 1.

Απόδειξη. Εφόσον η συνάρτηση

$$s \mapsto \frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1$$

είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του $\sigma > 0$ εκτός από έναν απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(s) = \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$$

είναι αναλυτική στο $\sigma > 0$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_m(s) = \int_1^m \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt \quad \text{για } s \in \mathbb{C} \text{ με } \sigma > 0.$$

Επειδή το ολοκληρωτέο είναι αναλυτική συνάρτηση του s , δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι f_m είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\sigma > 0$.

Εναλλακτικά, γράφουμε το $f_m(s)$ ως δυναμοσειρά. Παρατηρούμε ότι

$$f_m(s) = \int_1^m \{t\} e^{-(s+1)\log t} dt = \int_1^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{t\} (-\log t)^n (s+1)^n}{n!} dt,$$

και ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{t\} (-\log t)^n (s+1)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\log t|(|s|+1))^n}{n!} = e^{|\log t|(|s|+1)}.$$

Άρα

$$\int_1^m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{t\} (-\log t)^n (s+1)^n}{n!} \right| dt \leq \int_1^m t^{|s|+1} dt < \infty.$$

Με το θεώρημα Fubini, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και αθροίσεως και παίρνουμε

$$f_m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+1)^n}{n!} \int_1^m \{t\} (-\log t)^n dt,$$

που είναι δυναμοσειρά ως προς το s .

Για να δούμε ότι $f_m \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\sigma > 0$, θεωρούμε το ημιεπίπεδο $\sigma \geq \delta$ και παίρνουμε

$$|f_m(s) - f(s)| \leq \int_m^{\infty} \frac{1}{t^{\sigma+1}} dt \ll \frac{1}{\sigma m^{\sigma}} \leq \frac{1}{\delta m^{\delta}}.$$

Άρα, αν $\varepsilon, \delta > 0$ δοθούν, μπορούμε να διαλέξουμε $M > 0$ που εξαρτάται από ε, δ αλλά όχι από το s (π.χ. $M = (\delta\varepsilon)^{-1/\delta}$) τέτοιο ώστε $|f_m(s) - f(s)| < \varepsilon$ για κάθε $m > M$ και κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma \geq \delta$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παράρτημα

3 Βασικά για μιγαδικούς αριθμούς και σύνολα στο $\mathbb{C}$

Ορισμός 3.1. Κάθε $s \in \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά ως $s = \sigma + it$, όπου $\sigma = \operatorname{Re}(s) \in \mathbb{R}$ και $t = \operatorname{Im}(s) \in \mathbb{R}$. Το μέτρο του s είναι $|s| = \sqrt{\sigma^2 + t^2}$.

Ορισμός 3.2 (Δίσκοι και ημιεπίπεδα). Για $s_0 \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ θέτουμε

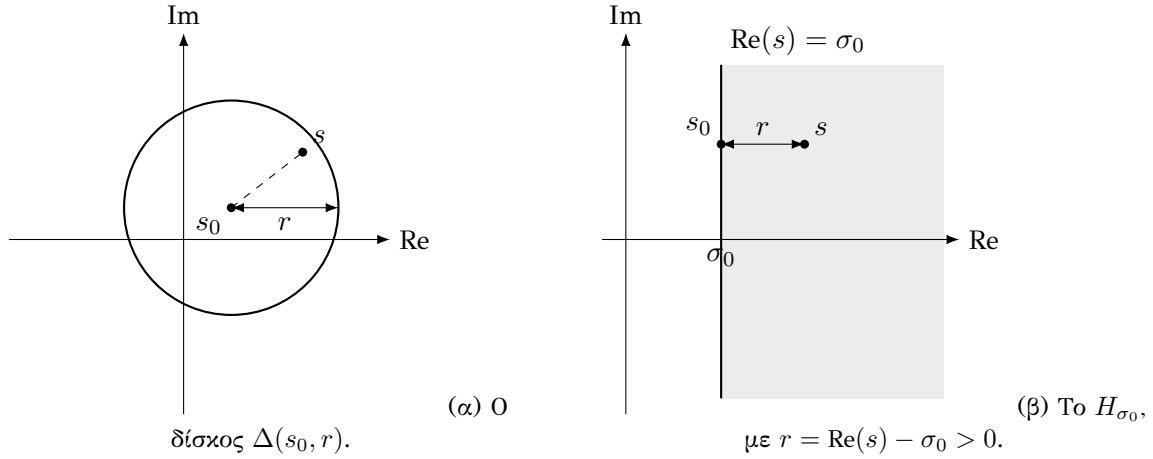
$$\Delta(s_0, r) = \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| < r\}.$$

Για $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$H_{\sigma_0} = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}.$$

Πρόταση 3.3 (Ανισότητες για το μέτρο). Για $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν:

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad |zw| = |z||w|, \quad |z/w| = |z|/|w| \quad (w \neq 0).$$



Σχήμα 1: Δίσκος και δεξί ημιεπίπεδο.

3.1 Σύγκλιση στο $\mathbb{C}$

Ορισμός 3.4 (Σύγκλιση ακολουθίας στο $\mathbb{C}$). Λέμε ότι μια ακολουθία $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει στο $z \in \mathbb{C}$ (και γράφουμε $z_n \rightarrow z$) αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ ώστε } \forall n \geq N, \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Πρόταση 3.5 (Κανόνες ορίων). Αν $z_n \rightarrow z$ και $w_n \rightarrow w$ στο $\mathbb{C}$, τότε:

$$z_n + w_n \rightarrow z + w, \quad z_n w_n \rightarrow zw, \quad |z_n| \rightarrow |z|.$$

Αν επιπλέον $w \neq 0$ και $w_n \neq 0$ για n μεγάλα, τότε

$$\frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{z}{w}.$$

3.2 Σειρές μιγαδικών αριθμών

Ορισμός 3.6 (Σειρά και μερικά αθροίσματα). Για $(z_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ θέτουμε $S_N = \sum_{n=0}^N z_n$. Λέμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει αν η ακολουθία (S_N) συγκλίνει σε κάποιο $S \in \mathbb{C}$.

Πρόταση 3.7 (Κριτήριο Cauchy). Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ ώστε } \forall m > n \geq N, \quad \left| \sum_{k=n+1}^m z_k \right| < \varepsilon.$$

Ορισμός 3.8 (Απόλυτη σύγκλιση). Λέμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$.

Θεώρημα 3.9 (Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ σύγκλιση). Αν $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει και

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |z_n|.$$

3.3 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 3.10 (Ομοιόμορφη σύγκλιση). Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ και $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Λέμε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο A αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ ώστε } \forall n \geq N \forall s \in A, \quad |f_n(s) - f(s)| < \varepsilon.$$

Παρατήρηση 3.11. Η ομοιόμορφη σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ στο A ισοδυναμεί με

$$\sup_{s \in A} |f_n(s) - f(s)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Θεώρημα 3.12 (Κριτήριο M του Weierstrass). Έστω $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ και $M_n \geq 0$ ώστε $|f_n(s)| \leq M_n$ για κάθε $s \in A$. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A .

4 Η εκθετική και μιγαδικές δυνάμεις

Ορισμός 4.1 (Εκθετική). Η $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται από

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Παρατήρηση 4.2 (Σύγκλιση της εκθετικής). Για $z_n = \frac{z^n}{n!}$ ισχύει $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0$, άρα η σειρά της εκθετικής συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Πρόταση 4.3 (Βασικές ιδιότητες). Για $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν $e^{z+w} = e^z e^w$, $e^0 = 1$, και

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

Επίσης $e^{it} = \cos t + i \sin t$ για $t \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 4.4 (Μιγαδική δύναμη y^s για $y > 0$). Για $y > 0$ και $s \in \mathbb{C}$ θέτουμε

$$y^s := e^{s \ln y},$$

όπου $\ln y$ είναι ο πραγματικός λογάριθμος του θετικού y .

5 Ολόμορφες συναρτήσεις και αναλυτική συνέχιση

5.1 Τοπολογικές Έννοιες

Ορισμός 5.1 (Ανοικτό/κλειστό). $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό αν για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει $r > 0$ με $\Delta(z, r) \subset \Omega$. F είναι κλειστό αν $\mathbb{C} \setminus F$ είναι ανοικτό.

Ορισμός 5.2 (Συμπαγές). Ένα $K \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Ορισμός 5.3 (Συνεκτικό). Ω λέγεται συνεκτικό αν δεν γράφεται ως ένωση δύο ξένων, μη κενών, ανοικτών (στη σχετική τοπολογία) συνόλων.

Ορισμός 5.4 (Ολόμορφη). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Μία $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ολόμορφη αν για κάθε $s \in \Omega$ υπάρχει

$$f'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h}.$$

Πρόταση 5.5 (Αλγεβρικές πράξεις). Αν f, g είναι ολόμορφες στο Ω , τότε $f+g$ και fg είναι ολόμορφες. Αν επιπλέον $g(s) \neq 0$ σε Ω , τότε και f/g είναι ολόμορφη.

Θεώρημα 5.6 (Weierstrass: όριο ολόμορφων). Έστω Ω ανοικτό και $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφες. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$, τότε f είναι ολόμορφη στο Ω .

Θεώρημα 5.7 (Θεώρημα Weierstrass: όριο ολόμορφων και σύγκλιση παραγώγων). Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $(f_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι:

1. $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$,
2. $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$.

Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω , ισχύει $f' = g$ στο Ω , και μάλιστα για κάθε $k \geq 1$ έχουμε $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές.

Θεώρημα 5.8. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω . Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Ω . Τότε, η f είναι αναλυτική στο Ω και ισχύει ότι $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Ω .

Απόδειξη. Έστω $s \in \Omega$. Αφού το Ω είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{\Delta}(s, \delta) \subseteq \Omega$. Οι f_n είναι συνεχείς στο Ω , άρα και στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta}(s, \delta)$. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta}(s, \delta)$, έπεται ότι η f είναι συνεχής στον $\overline{\Delta}(s, \delta)$. Ειδικότερα, η f είναι συνεχής στο s . Συμπεραίνουμε έτσι ότι η f είναι συνεχής στο Ω .

Έστω τώρα γ τριγωνική καμπύλη τέτοια ώστε η εικόνα της γ^* καθώς και το εσωτερικό της τρίγωνο $T(\gamma^*)$ να περιέχονται στο Ω . Αφού κάθε f_n είναι αναλυτική στο Ω , για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\int_{\gamma} f_n(s) ds = 0.$$

Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο συμπαγές σύνολο γ^* , έχουμε

$$\left| \int_{\gamma} f_n(s) ds - \int_{\gamma} f(s) ds \right| \leq \max_{s \in \gamma^*} |f_n(s) - f(s)| \cdot \ell(\gamma) \rightarrow 0,$$

(όπου $\ell(\gamma)$ είναι το μήκος της γ). Συνεπώς,

$$\int_{\gamma} f(s) ds = 0.$$

Αφού η f είναι και συνεχής στο Ω , από το Θεώρημα Morera βλέπουμε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω .

Θεωρούμε τώρα ανοικτό δίσκο $\Delta(s_0, \delta_0)$ ώστε $\overline{\Delta}(s_0, \delta_0) \subseteq \Omega$ και έστω $C(s_0, \delta_0)$ η περιφέρεια του δίσκου. Από τον τύπο του Cauchy έχουμε

$$f'_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s_0, \delta_0)} \frac{f_n(z)}{(z-s)^2} dz \quad \text{για κάθε } s \in \Delta(s_0, \delta_0),$$

και

$$f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s_0, \delta_0)} \frac{f(z)}{(z-s)^2} dz \quad \text{για κάθε } s \in \Delta(s_0, \delta_0).$$

Παρατηρούμε ότι αν $s \in \Delta(s_0, \delta_0/2)$, τότε $|z-s| \geq \delta_0/2$ για κάθε $z \in C(s_0, \delta_0)$, άρα

$$|f'_n(s) - f'(s)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(s_0, \delta_0)} \frac{|f_n(z) - f(z)|}{|z-s|^2} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{z \in C(s_0, \delta_0)} |f_n(z) - f(z)| \int_{C(s_0, \delta_0)} \frac{1}{(\delta_0/2)^2} |dz|.$$

Επειδή $\ell(C(s_0, \delta_0)) = 2\pi\delta_0$, παίρνουμε

$$\sup_{s \in \Delta(s_0, \delta_0/2)} |f'_n(s) - f'(s)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{z \in C(s_0, \delta_0)} |f_n(z) - f(z)| \cdot \frac{2\pi\delta_0}{(\delta_0/2)^2} = \frac{4}{\delta_0} \max_{z \in C(s_0, \delta_0)} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Έτσι αποδεικνύουμε ότι για κάθε $s_0 \in \Omega$ υπάρχει $\delta_0 = \delta_0(s_0) > 0$ τέτοιο ώστε $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στον $\Delta(s_0, \delta_0/2)$.

Έστω τώρα K συμπαγές υποσύνολο του Ω . Θεωρώντας την ανοικτή κάλυψη του K από δίσκους $\Delta(s, \delta(s)/2)$, $s \in K$, και περνώντας σε πεπερασμένη υποκάλυψη, βρίσκουμε $s_1, \dots, s_N \in K$ και $\delta_1, \dots, \delta_N > 0$ ώστε

$$K \subseteq \Delta(s_1, \delta_1/2) \cup \dots \cup \Delta(s_N, \delta_N/2),$$

και το $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα σε κάθε έναν από αυτούς τους δίσκους. Αφού το πλήθος των δίσκων είναι πεπερασμένο, συμπεραίνουμε ότι $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στο K . $\square$

Θεώρημα 5.9. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω . Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n$ να συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Ω . Τότε, η f είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$ ισχύει ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty f'_n$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο K προς την f' .

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $s_n = f_1 + \dots + f_n$. Κάθε s_n είναι αναλυτική στο Ω και $s_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$. Από το Θεώρημα A.1.1 έπεται ότι η f είναι αναλυτική στο Ω και ότι $s'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$. Επειδή

$$s'_n = f'_1 + \dots + f'_n,$$

συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f'_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K προς την f' . $\square$

Θεώρημα 5.10 (Identity theorem). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη. Αν το σύνολο $\{s \in \Omega : f(s) = 0\}$ έχει σημείο συσσώρευσης μέσα στο Ω , τότε $f \equiv 0$ στο Ω .

Πόρισμα 5.11 (Μοναδικότητα αναλυτικής συνέχισης). Αν f, g είναι ολόμορφες σε ανοικτό, συνεκτικό Ω και συμφωνούν σε σύνολο με σημείο συσσώρευσης στο Ω , τότε $f \equiv g$ στο Ω .

6 Μιγαδικά ολοκληρώματα

6.1 Ορισμός και βασική εκτίμηση

Ορισμός 6.1 (Ολοκλήρωμα κατά μήκος καμπύλης). Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ τμηματικά C^1 και F συνεχής σε σύνολο που περιέχει την $\gamma([a, b])$. Ορίζουμε

$$\int_\gamma F(s) ds := \int_a^b F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Πρόταση 6.2 (ML-ανισότητα). Αν $|F(s)| \leq M$ πάνω στην καμπύλη γ και $\ell(\gamma)$ είναι το μήκος της, τότε

$$\left| \int_\gamma F(s) ds \right| \leq M \ell(\gamma).$$

6.2 Θεώρημα και τύπος Cauchy

Θεώρημα 6.3 (Θεώρημα Cauchy). Αν F είναι ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο που περιέχει ένα απλό κλειστό περίγραμμα Γ και το εσωτερικό του, τότε

$$\int_\Gamma F(s) ds = 0.$$

Θεώρημα 6.4 (Τύπος Cauchy). Αν F είναι ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\Delta(s_0, r)$, τότε για κάθε $s \in \Delta(s_0, r)$ ισχύει

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-s_0|=r} \frac{F(w)}{w-s} dw.$$

Πόρισμα 6.5 (Ειδική περίπτωση: «υπόλοιπο στο 0» χωρίς Laurent). Αν H είναι ολόμορφη σε γειτονιά ενός απλού κλειστού περιγράμματος Γ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, τότε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{H(s)}{s} ds = H(0).$$

6.3 Παραμόρφωση διαδρομής (homotopy invariance)

Θεώρημα 6.6 (Παραμόρφωση διαδρομής: κλειστές καμπύλες). Έστω F ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και Γ_0, Γ_1 δύο τμηματικά C^1 κλειστές καμπύλες που είναι ομοτοπικές μέσα στο U . Τότε

$$\int_{\Gamma_0} F(s) ds = \int_{\Gamma_1} F(s) ds.$$

Παρατήρηση 6.7. Στο Κεφ. 9 αυτό χρησιμοποιείται όταν το integrand περιέχει $g_T(s)$ (που είναι entire), οπότε μπορούμε να παραμορφώσουμε το «αριστερό» κομμάτι μιας καμπύλης σε πιο βολική καμπύλη για εκτιμήσεις. Για το μέρος που περιέχει $g(s)$ (όχι entire), δεν επιτρέπεται γενικά τέτοια παραμόρφωση.

6.4 Ένα μικρό λήμμα συμπαγότητας

Λήμμα 6.8. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και g ολόμορφη σε γειτονιά κάθε σημείου του A (δηλ. για κάθε $a \in A$ υπάρχει $\delta_a > 0$ ώστε g είναι ολόμορφη στο $\Delta(a, \delta_a)$). Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε g να είναι ολόμορφη σε όλη τη $\{z : \text{dist}(z, A) < \delta\}$.

Απόδειξη. Οι δίσκοι $\Delta(a, \delta_a/2)$ σχηματίζουν ανοικτό κάλυμμα του A . Από συμπαγότητα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\Delta(a_j, \delta_{a_j}/2)$, $j = 1, \dots, m$. Θέτουμε $\delta = \min_j \delta_{a_j}/2 > 0$. Αν $\text{dist}(z, A) < \delta$, διάλεξε $a \in A$ με $|z - a| < \delta$. Υπάρχει j με $|a - a_j| < \delta_{a_j}/2$. Τότε $|z - a_j| \leq |z - a| + |a - a_j| < \delta + \delta_{a_j}/2 \leq \delta_{a_j}$, άρα $z \in \Delta(a_j, \delta_{a_j})$ όπου g είναι ολόμορφη. $\square$

7 Αναλυτικές συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκληρώματα

Θεώρημα 7.1 (Ολοκληρωτική ομοιομορφία σε συμπαγή $\Rightarrow$ ολόμορφοτητα). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

- για κάθε $x \in [a, b]$, η $s \mapsto f(x, s)$ είναι ολόμορφη στο Ω ,
- για κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$ υπάρχει $g_K \in L^1([a, b])$ με $|f(x, s)| \leq g_K(x)$ για όλα τα $s \in K$.

Τότε

$$F(s) := \int_a^b f(x, s) dx$$

είναι ολόμορφη στο Ω και επιτρέπεται παραγώγιση μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$F'(s) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} f(x, s) dx.$$