

- Διάρκεια εξέτασης 2:00 ώρες.
- Παραδίδουμε το γραπτό και το πρόχειρο.
- Αποτελέσματα τα οποία γράφονται χωρίς αιτιολόγηση (διότι πιθανόν θυμόμαστε απ' έξω) δεν βαθμολογούνται.

Θέμα 1 (5 + 5 μονάδες). (α) Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}.$$

(β) Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x}{x^2 + 2x - 8} dx.$$

Θέμα 2 (20 μονάδες). Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$$

[Υπόδειξη. Κάνετε την αντικατάσταση $u = x + 1$.]

Θέμα 3 (10 + 5 μονάδες). Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα (εξηγήστε τα βήματα που θα ακολουθήσετε)

$$(α) I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx. \quad (β) I_2 = \int_{-1}^1 \sin x \tan^2 x dx.$$

Θέμα 4 (15 μονάδες). Δείξτε τις ανισότητες

$$\frac{2}{5} < \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} < 2.$$

Θέμα 5 (20 μονάδες). Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $x = 0$ της

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Αρκεί να βρούμε τους τρεις πρώτους όρους της σειράς. [Υπόδειξη. Χρειαζόμαστε υπολογισμό χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο σειράς Taylor. Δεν είναι δεκτοί άλλοι τύποι τους οποίους πιθανόν θυμόμαστε απ' έξω.]

Θέμα 6 (10 + 10 μονάδες). (α) Βρείτε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier για την

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

(β) Γράψτε την σειρά χρησιμοποιώντας μόνο τους 2 πρώτους μη-μηδενικούς όρους.

[Υπόδειξη. Ξεκινήστε ελέγχοντας αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.]

Θέμα 7 (5 + 5 μονάδες). (α) Βρείτε τις δύο μερικές παραγώγους της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 y - y^2 x.$$

(β) Έστω η $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ποια η γραφική της παράσταση αν θέσουμε $y = a$, όπου το a είναι σταθερά; (γράψτε τον μαθηματικό τύπο της γραφικής παράστασης και πείτε ποια είναι η καμπύλη που περιγράφει την γραφική παράσταση).

Τυπολόγιο.

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
- $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$, $(e^x)' = e^x$, $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$.
- Έστω F αντιπαράγωγος της f : Είναι $f(x) = 1/x \Rightarrow F(x) = \ln|x|$, $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2} \Rightarrow F(x) = \arcsin x$.
- Η σειρά Taylor είναι $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$.
- Η σειρά Fourier της $f(x)$ (περιοδικής με περίοδο 2π) είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$