

Περιεχόμενα

5	Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	1
5.1	Συναρτήσεις δύο μεταβλητών	1
5.2	Γραφικές παραστάσεις	2
5.3	Μερικές παράγωγοι	4

Κεφάλαιο 5

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

5.1 Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Ας θυμηθούμε ότι η εξίσωση για το ιδανικό αέριο είναι $pV = nRT$ δηλαδή ο όγκος ιδανικού αερίου δίνεται από

$$V = \frac{nRT}{p}$$

και εξαρτάται και από την πίεση p και από την θερμοκρασία (η R είναι σταθερά και ας θεωρήσουμε δεδομένα mole n του αερίου). Γράφουμε τον όγκο ως συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$V(p, T) = \frac{nRT}{p}.$$

Γράφουμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών ως (κατ' αναλογία με τις συνηθισμένες συναρτήσεις $y = f(x)$)

$$z = f(x, y).$$

Ορισμός. Μία συνάρτηση $z = f(x, y)$ αντιστοιχεί σε κάθε σημείο (x, y) του $\mathbb{R}^2$ (ή ενός D υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$) έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό z του $\mathbb{R}$.

- Πεδίο ορισμού: Το σύνολο D στο οποίο ορίζεται η f .
- Σύνολο τιμών: Το σύνολο των αριθμών z που παίρνει η f (υποσύνολο του $\mathbb{R}$).

Παράδειγμα. Βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Θα πρέπει $4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$. Άρα, το πεδίο ορισμού της $f(x, y)$ είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

Παράδειγμα. Βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x, y) = x^2 + y^2$ και της $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$.

Θέτουμε $z = f(x, y)$ και είναι $z \geq 0$. Αν $z = g(x, y)$, είναι $z \geq 1$.

5.2 Γραφικές παραστάσεις

Για να κάνουμε την γραφική παράσταση της $z = f(x, y)$ πρέπει να σχεδιάσουμε το z για κάθε (x, y) στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (συνήθως θα κάθε σημείο του επιπέδου xy).

Παρατήρηση 5.1. Η γραφική παράσταση της $z = f(x, y)$ αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x, y, z) . Αυτά τα σημεία βρίσκονται βέβαια στον τρισδιάστατο χώρο, $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα. Θα σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Για $(x, y) = (0, 0)$ είναι $z = 0$ και παίρνουμε το σημείο $(0, 0, 0)$.
- Για κάθε σημείο (x, y) στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ παίρνουμε $z = 1$. Τα σημεία $(x, y, 1)$ στην γραφική παράσταση σχηματίζουν έναν κύκλο, ο οποίος όμως βρίσκεται σε ένα επίπεδο υπερυψωμένο πάνω από το επίπεδο xy .

- Για κάθε σημείο (x, y) στον κύκλο $x^2 + y^2 = c$ (με $c > 0$) παίρνουμε $z = c$. Τα σημεία (x, y, c) σχηματίζουν έναν κύκλο σε ύψος c πάνω από το επίπεδο xy .

Η γραφική παράσταση $z = f(x, y)$ είναι ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής.

- Η τομή του με κάθε επίπεδο παράλληλο του xy (πάνω από το xy) δίνει έναν κύκλο.
- Αν πάρουμε $y = 0$, τότε $z = f(x, 0) \Rightarrow z = x^2$ είναι μία παραβολή στο επίπεδο xz . Ομοίως $z = f(0, y) \Rightarrow z = y^2$ είναι μία παραβολή στο επίπεδο yz .

Ερώτηση. Περιγράψτε την γραφική παράσταση της $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$.

Παράδειγμα. Θα σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

Ορισμός. Η καμπύλη πάνω στην γραφική παράσταση της $z = f(x, y)$ για την οποία το z παίρνει σταθερή τιμή $z = z_0$ λέγεται **ισοσταθμική καμπύλη**. Όταν η ισοσταθμική καμπύλη προβάλλεται πάνω στο επίπεδο xy τότε ονομάζεται **ισοϋψής καμπύλη**.

Ερώτηση. Ποιές είναι οι ισοϋψείς καμπύλες της $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$.

Παράδειγμα. ([2], κεφ. 13.2 παράδειγμα 6) Το ηλεκτρικό δυναμικό στα σημεία του επιπέδου xy λόγω δύο φορτίων q_1, q_2 τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $(0, 0)$ και $(1, 0)$ δίνεται από την συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$\phi(x, y) = \frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}}.$$

Σχεδιάστε (με πρόγραμμα γραφικών) τις ισοϋψείς καμπύλες αυτής της συνάρτησης δυναμικού. (Επιλέξτε τιμές για τα q_1, q_2 .)

Άσκηση 5.2.1. (α) Βρείτε τις ισοϋψείς καμπύλες της $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

(β) Ποια είναι η συνάρτηση που περιγράφει την γραφική παράσταση της $z = f(x, y)$ στο επίπεδο xz ;

5.3 Μερικές παράγωγοι

Αν δώσουμε μία σταθερή τιμή στην μία μεταβλητή, π.χ., $y = 0$, τότε έχουμε μία συνάρτηση μίας μεταβλητής. Για παράδειγμα, αν $f(x, y) = x^2 + 2y^2$,

$$g(x) = f(x, y = 0) \Rightarrow g(x) = x^2.$$

Μπορούμε τότε να βρούμε την παράγωγο $g'(x) = 2x$. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε αν θέσουμε $y = b$ (οποιαδήποτε σταθερά), οπότε $g(x, y = b) = x^2 + 2b^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$. Τις παραγώγους της $f(x, y)$ που προκύπτουν όταν κρατάμε σταθερή την μία μεταβλητή, θα τις ονομάζουμε μερικές παραγώγους της f .

Ορισμός. Η μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (a, b) είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Η μερική παράγωγος της f ως προς y στο σημείο (a, b) είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}.$$

- Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x) = f(x, b)$ τότε η $\partial f / \partial x$ είναι η συνηθισμένη παράγωγος της g και δίνει, π.χ., την κλίση της γραφικής παράστασης όταν κινούμαστε στην κατεύθυνση x .
- Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(y) = f(a, y)$ τότε η $\partial f / \partial y$ είναι η συνηθισμένη παράγωγος της g και δίνει, π.χ., την κλίση της γραφικής παράστασης όταν κινούμαστε στην κατεύθυνση y .

Παράδειγμα. Είναι

$$f(x, y) = x^2 y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

Άσκηση 5.3.1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των

$$(\alpha) f(x, y) = x^2 - y^2, \quad (\beta) f(x, y) = x^2 e^y.$$

Βιβλιογραφία

- [1] J. Hass, C. Heil, M. D. Weir, “*Thomas: Απειροστικός Λογισμός*”, μετάφραση της 14ης αμερικανικής έκδοσης (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [2] W. Briggs, L. Cochran, B. Gillett, E. Schulz, “*Απειροστικός Λογισμός*” (Εκδόσεις Κριτική, 2018).
- [3] Ι. Δ. Πλατής, «*Μαθηματικά Ι: Πρόχειρες Σημειώσεις*» (2019).
- [4] E. Steiner, “*The Chemistry Maths Book*”, 2nd Edition (Oxford University Press).
- [5] Murray R. Spiegel, “*Ανάλυση Fourier*”, Schaum’s Outline Series (McGRAW HILL, ΕΣΠΙ).