

BIO-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Παραδίνετε τις ασκήσεις 6.1 (B), 6.2, 6.4, 6.6.

Άσκηση 6.1 Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι κάποιος από τους δύο διαγωνίσιμος;

Άσκηση 6.2 Δίνονται τα διανύσματα $v_1 = (0, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, -1, 1)$ και ο υπόχωρος $U = \text{Span}\{v_1, v_2\}$.

1. Υπολογίστε μία βάση του $U^\perp$.
2. Υπολογίστε την προβολή του διανύσματος $v = (1, 1, 1, 1)$ στον U .
3. Δώστε μία ορθογώνια βάση $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ του $\mathbb{R}^4$ ώστε $U = \text{Span}\{b_1, b_2\}$ και $U^\perp = \text{Span}\{b_3, b_4\}$

Άσκηση 6.3 Στο χώρο $\mathbb{R}^3$, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, βρείτε την ορθοκανονική βάση που προκύπτει από την εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt στη βάση $(1, -1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.

Άσκηση 6.4 Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 = x + w\}$.

Άσκηση 6.5 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_4, -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4, -x_1 + x_2 + x_3 - x_4).$$

- (i) Υπολογίστε μία ορθογώνια βάση του $\ker(L)$.
- (ii) Υπολογίστε μία βάση του $\ker(L)^\perp$.

Άσκηση 6.6 Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων των σημείων $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 6.7 Αν ένας πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(x - 1)^2(x + 2)^3$, να βρεθούν όλα τα δυνατά ελάχιστα πολυώνυμα του A . Να βρεθούν επίσης πίνακες A οι οποίοι έχουν αυτά τα πολυώνυμα σαν ελάχιστα πολυώνυμα.