



ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Γράφετε με ανοικτές σημειώσεις. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1 (3 μον.) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$L(x, y, z) = (x_1 - x_3 + 2x_4, x_1 - x_2 + 2x_4, 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4).$$

1. Υπολογίστε τον πίνακα της L .
2. Υπολογίστε μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας της L .
3. Υπολογίστε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\ker(L)$.

Θέμα 2 (3 μον.) Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιόχωρους του A .
2. Εξετάστε εάν ο A είναι διαγωνίσιμος και εάν είναι υπολογίστε αντιστρέψιμο πίνακα P και διαγώνιο πίνακα D τέτοιους ώστε $A = PDP^{-1}$.

Θέμα 3 (3 μον.) Έχετε ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο οποίος έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ με αλγεβρικές πολλαπλότητες $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ και γεωμετρικές πολλαπλότητες $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ αντίστοιχα. Τότε

1. Γράψτε τι γνωρίζετε για τη σχέση μεταξύ των α_i και γ_i .
2. Γράψτε τι επιπλέον γνωρίζετε για τα α_i, γ_i , εάν ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.
3. (*) Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει μία μόνο ιδιοτιμή ίση με λ , η οποία έχει γεωμετρική πολ/τα ίση με n . Μπορείτε να βρείτε τον πίνακα A ;

Θέμα 4 (1 μον.) Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $\det(A) = -1$ και $\det(B) = 2$. Υπολογίστε τις ορίζουσες των πινάκων: $A^2B, A^T B^{-1}, 3A$.

Θέμα 5 (2 μον.) Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε τη/τις σωστή/ες απάντηση και εξηγήστε σύντομα.

1. Έχετε τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{75 \times 100}$. Τότε
 - (i) Η τάξη του A μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός $75 \leq r \leq 100$.
 - (ii) Η τάξη του A μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός $0 \leq r \leq 75$.
 - (iii) Η τάξη του A μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός $0 \leq r \leq 100$.
 - (iv) Η τάξη του A μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός ακέραιος αριθμός.
2. Έχετε 100 μεταβλητές και με κάποια διαδικασία παίρνετε γραμμικές εξισώσεις στις μεταβλητές αυτές. Τότε
 - (i) Οποιοσδήποτε 100 εξισώσεις αρκούν για να έχετε ένα σύστημα με μοναδική λύση.
 - (ii) Υπάρχουν 100 εξισώσεις, οι οποίες δίνουν ένα σύστημα με μοναδική λύση.
 - (iii) Λιγότερες από 100 εξισώσεις δίνουν ένα σύστημα που είτε είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.