

BIO-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Παραδίνετε τις ασκήσεις 5.2, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7.

Άσκηση 5.1 Βρείτε τις ιδιοτιμές και αντίστοιχους ιδιόχωρους για τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ποιά είναι η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής; Είναι οι πίνακες διαγωνιοποιήσιμοι;

Άσκηση 5.2 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Εξετάστε αν ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος και υπολογίστε, εφόσον υπάρχουν, διαγώνιο πίνακα D και αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιους ώστε $A = P^{-1}DP$. Υπολογίστε τον ²⁰²⁵.

Άσκηση 5.3 Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του ανάστροφου πίνακα A^T είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του A .

Άσκηση 5.4 Βρείτε έναν 2×2 πίνακα A του οποίου οι ιδιοτιμές είναι τα 1 και 4 και τα ιδιοδιανύσματα είναι $(3, 1)$ και $(2, 1)$ αντιστοίχως.

Άσκηση 5.5 Σωστό ή Λάθος;

Αν ο 3×3 πίνακας έχει ιδιοτιμές τα 1, 1, 2 τότε

- 1) Ο πίνακας αντιστρέφεται
- 2) Ο πίνακας διαγωνιοποιείται
- 3) Ο πίνακας δεν διαγωνιοποιείται.

Άσκηση 5.6 Βρείτε κλειστό τύπο για την ακολουθία (a_n) η οποία ορίζεται αναδρομικά

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \text{ για } n \geq 2.$$

Άσκηση 5.7 Έστω $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = x^2 + x + 1$. Δείξτε ότι $A^3 = I$.

Άσκηση 5.8 Βρείτε ένα μη διαγώνιο 3×3 πίνακα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(x) = x(x+2)(x-7)$.