

Περιεχόμενα

4	Άπειρες σειρές	1
4.1	Εισαγωγή	1
4.2	Δυναμοσειρές	5
4.3	Σειρές Taylor και MacLauren	6
4.4	Σειρές Fourier	11

Κεφάλαιο 4

Άπειρες σειρές

4.1 Εισαγωγή

4.1.1 Ακολουθίες

Ερώτηση. Υπολογίστε με το κομπιουτεράκι το άρθιοισμα της παρακάτω σειρά αριθμών

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Ποιος είναι ο αριθμός που βρίσκετε; Αν φανταστείτε ότι η σειρά αυτή έχει άπειρους όρους, θα ήταν δυνατόν να τους προσθέσετε και να βρείτε το αποτέλεσμα;

Ορισμός (Ακολουθία). Μία ακολουθία είναι μία λίστα αριθμών σε δεδομένη διάταξη,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Για παράδειγμα,

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

Εδώ εννοούμε ότι το n παίρνει τις τιμές $n = 1, 2, 3, \dots$

Επίσης, (οι όροι στην σειρά στην αρχή του κεφαλαίου - αγνοώντας το πρόσημο)

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$$

Ορισμός (Σύγκλιση ακολουθίας). Η ακολουθία $\{a_n\}$ **συγκλίνει** στον αριθμό L αν σε κάθε θετικό αριθμό ϵ αντιστοιχεί ένας ακέραιος N τέτοιος ώστε

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad \text{για κάθε } n > N.$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός L , τότε λέμε ότι η $\{a_n\}$ **αποκλίνει**.

Αν η $\{a_n\}$ **συγκλίνει** στον L , γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, ή $a_n \rightarrow L$.

Παράδειγμα. (α) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(β) ([1], κεφ. 10.1, παράδειγμα 2). Η ακολουθία $\{1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$ αποκλίνει.

(γ) Η ακολουθία $\{\sqrt{n}\}$ αποκλίνει στο άπειρο. Γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Θεώρημα. Έστω οι ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ και οι A, B πραγματικοί αριθμοί.

Όριο αθροίσματος:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

Όριο σταθερού πολλαπλασίου:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = kA$$

Όριο γινομένου:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Παράδειγμα.

$$(\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

$$(\beta) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-7n^2}{n^2+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4/n^2-7}{1+3/n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0-7}{1+0} = -7.$$

Θεώρημα (Θεώρημα συνεχούς συνάρτησης για ακολουθίες). Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$. Αν $a_n \rightarrow L$ και αν η f είναι συνάρτηση συνεχής στο L και ορισμένη σε όλα τα a_n , τότε $f(a_n) \rightarrow f(L)$.

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία με $a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{n}}$. Γνωρίζουμε ότι $\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$. Θέτουμε $f(x) = \sqrt{x}$ και $L = 1$ και έχουμε

$$\sqrt{\frac{2n+1}{n}} \rightarrow \sqrt{2}.$$

4.1.2 Σειρές

Ορισμός (Σειρά). Μία σειρά είναι το άθροισμα μίας άπειρης ακολουθίας αριθμών,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Συχνά γράφουμε το άθροισμα των n πρώτων όρων της σειράς ως

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Παράδειγμα (Γεωμετρική σειρά). Ας δούμε την σειρά

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \sum_{k=1}^n r^{k-1}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το s_n ως εξής

$$\begin{aligned}s_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} \\ rs_n &= r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n,\end{aligned}$$

ώστε

$$s_n - rs_n = 1 - r^n \Rightarrow s_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad r \neq 1. \quad \square$$

Για την άπειρη γεωμετρική σειρά, δηλαδή, όταν $n \rightarrow \infty$, βλέπουμε ότι

- Αν $|r| > 1$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \rightarrow \infty$ και η σειρά απειρίζεται, $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n \rightarrow \infty$.
- Για $|r| < 1$, είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

Για μία σειρά $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, αν έχουμε τον γενικό όρο a_n τότε μπορούμε να αναπαράγουμε όλους τους όρους.

Παράδειγμα. Έστω $a_n = \{r^{2n}\}$, όπου $r \in \mathbb{R}$, τότε η σειρά είναι η

$$1 + r^2 + r^4 + r^6 + \dots + r^{2n} + \dots \quad \square$$

Θα πρέπει να είναι σαφές ότι μία σειρά μπορεί να συγκλίνει σε έναν αριθμό ή όχι, ή να αποκλίνει στο άπειρο. Υπάρχουν κριτήρια τα οποία, σε πολλές περιπτώσεις, μας λένε αν μία σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Θεώρημα (Κριτήριο του λόγου). Έστω $\sum a_n$ μία σειρά και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho.$$

- Αν $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει.
- Αν $\rho > 1$, η σειρά αποκλίνει.
- Αν $\rho = 1$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Θεώρημα. Έστω οι $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ είναι συγκλίνουσες σειρές, τότε

$$\begin{array}{ll} \text{Άθροισμα:} & \sum (a_n + b_n) = A + B \\ \text{Σταθερό πολλαπλάσιο:} & \sum k a_n = kA. \end{array}$$

4.2 Δυναμοσειρές

Ορισμός. Δυναμοσειρά με κέντρο το $x = 0$ είναι μία σειρά της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots,$$

όπου οι $c_0, c_1, c_2, \dots$ είναι σταθερές.

Δυναμοσειρά με κέντρο το $x = a$ είναι μία σειρά της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots.$$

Παράδειγμα. Η γεωμετρική δυναμοσειρά είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots .$$

Συγκλίνει για $|x| < 1$ και είναι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots , \quad -1 < x < 1.$$

4.3 Σειρές Taylor και MacLauren

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση της οποίας η έκφραση είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

δηλαδή, δίνεται από μία δυναμοσειρά. Μπορούμε εύκολα να βρούμε τις παραγώγους της,

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2} + \cdots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) a_n x^{n-3} + \cdots . \end{aligned}$$

Μπορούμε να δούμε ότι η -οστή παράγωγος είναι

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + \text{κάτι} \cdot x + \text{κάτι} \cdot x^2 + \cdots .$$

Παίρνουμε το $x = 0$ και βρίσκουμε

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = 3 \cdot 2a_3, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε όλους τους συντελεστές της δυναμοσειράς ως

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση $f(x)$ ως

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε τα βήματα που είδαμε παραπάνω αν θέσουμε όπου x το $x - a$, όπου a είναι μία σταθερά. Ξεκινάμε από την

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

και βρίσκουμε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

Ορισμός (Σειρά Taylor και MacLauren). Έστω f συνάρτηση με παραγώγους όλων των τάξεων σε κάθε σημείο ενός διαστήματος και a κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Τότε η σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = a$ είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

Η σειρά MacLauren της f είναι η σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

Παράδειγμα. Ας βρούμε τη σειρά Taylor η οποία παράγεται από την

$$f(x) = e^x.$$

Εφόσον $f^{(n)}(x) = e^x$, είναι $f^{(n)}(0) = 1$ για κάθε $n \geq 0$. Όστε η σειρά Taylor είναι

$$1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Ορισμός (Πολυώνυμα Taylor). Έστω f συνάρτηση με παραγώγους τάξεως k σε κάποιο διάστημα που περιέχει το a ως εσωτερικό σημείο. Τότε, για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο $n < k$, το πολυώνυμο Taylor τάξεως n που παράγεται από την f στο $x = a$ είναι το

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Παράδειγμα. Το πολυώνυμο Taylor τάξης n το οποίο παράγεται από την $f(x) = e^x$ είναι

$$1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Ερώτηση. (α) Ποια είναι η γραμμική προσέγγιση της e^x στο σημείο $x = 0$; (β) Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της e^x και την γραμμική της προσέγγιση. (γ) Σχεδιάστε επίσης το πολυώνυμο $P_2(x)$ στο $x = 0$. Τι παρατηρείτε;

Παράδειγμα. Ας βρούμε τη σειρά Taylor στο $x = 0$ η οποία παράγεται από την

$$f(x) = \cos x.$$

Είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\sin x, & f''(x) &= -\cos x, & f'''(x) &= \sin x, & \dots, \\ f^{(2n)} &= (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)} &= (-1)^{n+1} \sin x. \end{aligned}$$

Αφού $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, η σειρά Taylor είναι

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Ερώτηση. Τι βαθμού μπορεί να είναι ένα πολυώνυμο Taylor τάξης n ;

Παράδειγμα. Ας βρούμε τη σειρά Taylor στο $x = 0$ η οποία παράγεται από την

$$f(x) = \cosh x.$$

Γράφουμε

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

και θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor της e^x ,

$$\cosh x = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

4.3.1 Σύγκλιση της σειράς Taylor

Θεώρημα (Τύπος του Taylor). Αν η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα ανοιχτό διάστημα I που περιέχει το a , τότε για κάθε ακέραιο $n > 0$ και για κάθε $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

όπου

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \text{για κάποιο } c \in [a, x].$$

Το παραπάνω μας λέει ότι ένα πολυώνυμο Taylor προσεγγίζει μία συνάρτηση $f(x)$ και έχει ένα συγκεκριμένο υπόλοιπο R_n . Η τιμή του υπολοίπου δεν είναι γνωστή στην γενική περίπτωση, όμως σε πολλές περιπτώσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε το υπόλοιπο και να γνωρίζουμε πόσο καλή είναι η προσέγγισή μας.

Παρατήρηση 4.1. Αν $R_n(x) \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$ για κάθε $x \in I$, λέμε ότι η σειρά Taylor συγκλίνει στην f .

Διωνυμική σειρά. Έχουμε την σειρά Taylor

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται διωνυμική και συγκλίνει για $|x| < 1$. Για να την εξάγουμε, έχουμε

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \dots$$

Παίρνουμε τις τιμές της f και των παραγώγων στο $x = 0$,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \quad \dots$$

- Αν m είναι ακέραιος ≥ 0 τότε η σειρά τερματίζεται έπειτα από $m+1$ όρους.
- Αν το m δεν είναι θετικός ακέραιος τότε η σειρά είναι άπειρη και συγκλίνει για $|x| < 1$.

Παράδειγμα. Βρείτε την σειρά γύρω από το $x = 0$ για την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x}$. Είναι

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

Ορισμός (Διωνυμικοί συντελεστές). Για πραγματικούς αριθμούς p και ακεραίους $k \geq 1$, ορίζουμε τα σύμβολα

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}, \quad \binom{m}{0} = 1.$$

Αυτοί είναι οι συντελεστές στην διωνυμική σειρά.

Ερώτηση. Αν μας δοθεί η συνάρτηση $f(x) = (a+x)^m$, πώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την σειρά Taylor της $(1+x)^m$ και να βρούμε την σειρά Taylor της $f(x)$;

4.3.2 Εφαρμογές

Γνωρίζουμε από μία άσκηση ότι

$$\arctan x = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Μπορούμε να βρούμε μία έκφραση για το π ως εξής

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

4.4 Σειρές Fourier

4.4.1 Περιοδικές συναρτήσεις

Θα δούμε συναρτήσεις $f(x)$ οι οποίες είναι περιοδικές, δηλαδή ισχύει

$$f(x + P) = f(x) \quad \text{όπου } P > 0 \text{ είναι η περίοδος.}$$

Φυσικά παραδείγματα.

- Η θέση της Σελήνης ως προς την Γη είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου.
- Τα ηχητικά κύματα παράγονται από ταλαντώσεις (περιοδικές στον χρόνο κινήσεις) των φωνητικών χορδών.

Παραδείγματα συναρτήσεων.

- Η $\sin x$ έχει περίοδο $P = 2\pi$. Μπορεί επίσης να θεωρηθεί ότι έχει περίοδο 4π και επίσης $6\pi, 8\pi, \dots$, επειδή τα $\sin(x + 2\pi), \sin(x + 4\pi), \sin(x + 6\pi), \dots$ είναι όλα ίσα με $\sin x$. Η ελάχιστη περίοδος ή απλώς “περίοδος” είναι $P = 2\pi$.
- Η $\sin(nx)$, όπου n είναι ακέραιος, έχει περίοδο $P = 2\pi/n$.
- Μπορούμε να κατασκευάσουμε συνάρτηση ημιτόνου η οποία έχει περίοδο P . Είναι η $\sin\left(\frac{2\pi x}{P}\right)$.
- Παρόμοια ισχύουν και για την $\cos x$.

4.4.2 Ορισμός σειράς Fourier

Έστω $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $(-L, L)$ και έξω από το διάστημα ορίζεται με την σχέση $f(x + 2L) = f(x)$, δηλαδή είναι περιοδική με περίοδο $2L$. Θα ξεκινήσουμε θεωρώντας $L = \pi$, δηλαδή η

περίοδος είναι 2π . Η σειρά Fourier, ή το ανάπτυγμα Fourier της $f(x)$ ορίζεται ως

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

όπου οι συντελεστές Fourier είναι

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Δείτε ότι

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx : \quad \text{μέση τιμή της συνάρτησης.}$$

Οι συναρτήσεις $\sin(nx)$, για κάθε ακέραιο n , έχουν όλες περίοδο $2L$ (το ίδιο και οι $\cos(nx)$). Άρα η σειρά Fourier παριστάνει μία περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2L$.

Παρατήρηση 4.2. Σε πολλές περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι η σειρά Fourier συγκλίνει στην περιοδική συνάρτηση $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

- Αν η $f(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε βρίσκουμε $b_n = 0$, άρα

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

- Αν η $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση, τότε βρίσκουμε $a_n = 0$, άρα

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Παράδειγμα. Ορίζουμε την $f(x) = x$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και την επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Είναι περιττή συνάρτηση, άρα $a_n = 0$. Είναι

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx$$

Κάνουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση

$$b_n = \left[-\frac{1}{n\pi} x \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = \begin{cases} \frac{2}{n} & n \text{ περιττός} \\ -\frac{2}{n} & n \text{ άρτιος} \end{cases}.$$

Άρα

$$x = 2 \sin x - \sin(2x) \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x) - \dots, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad \square$$

Για συνάρτηση με περίοδο $2L$, η σειρά Fourier είναι

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

όπου οι συντελεστές Fourier είναι

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Παράδειγμα. ([5], κεφ. 2, άσκηση 2.11) Ας ορίσουμε την συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$ την οποία θεωρούμε περιοδική με περίοδο $P = \pi$ (κάνετε γραφική παράσταση). Αυτή είναι μία άρτια συνάρτηση, άρα μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά συνημιτόνων. Βρίσκουμε

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos(nx) dx = \dots = \frac{-2(1 + \cos(n\pi))}{\pi(n^2 - 1)}, \quad n \neq 1.$$

Είναι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \dots = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \dots \right).$$

Βιβλιογραφία

- [1] J. Hass, C. Heil, M. D. Weir, “*Thomas: Απειροστικός Λογισμός*”, μετάφραση της 14ης αμερικανικής έκδοσης (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [2] W. Briggs, L. Cochran, B. Gillett, E. Schulz, “*Απειροστικός Λογισμός*” (Εκδόσεις Κριτική, 2018).
- [3] Ι. Δ. Πλατής, «*Μαθηματικά I: Πρόχειρες Σημειώσεις*» (2019).
- [4] E. Steiner, “*The Chemistry Maths Book*”, 2nd Edition (Oxford University Press).
- [5] Murray R. Spiegel, “*Ανάλυση Fourier*”, Schaum’s Outline Series (McGRAW HILL, ΕΣΠΙ).