

ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Παραδίνετε τις ασκήσεις **4.1**, **4.2 (β)**, **4.6 (2)**, **4.10**.

Άσκηση 4.1 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ώστε

$$f(1, 1, 0, 0) = (1, -1, 0, 2), f(1, 0, 1, 0) = (0, 1, 2, -1), f(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 1, 0), f(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

α'. Βρείτε τον τύπο της f και την τιμή $f(1, 2, 3, 1)$.

β'. Βρείτε τον πίνακα της f ως προς τις κανονικές βάσεις.

γ'. Βρείτε μία βάση της εικόνας και μία βάση του πυρήνα της f .

Άσκηση 4.2 Δίνεται η βάση $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2), (0, -1, 1), (1, 0, 2)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α'. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από τη $\mathcal{B}$ στην κανονική, $\mathcal{E}$.

β'. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την κανονική, $\mathcal{E}$, στην $\mathcal{B}$.

γ'. Γράψτε το διάνυσμα $(2, 3, 1)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Άσκηση 4.3 Εστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $f(x, y, z) = (x + 3z, 2x + y + 5z, y + 2z)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός. Βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

Άσκηση 4.4 Δίνονται τα σύνολα $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ και $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (2, -1, 1), (0, 1, 2)\}$ και η γραμμική απεικόνιση με πίνακα $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$[L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Δείξτε ότι τα σύνολα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Δείξτε ότι η L είναι ισομορφισμός.

(iii) Βρείτε τον τύπο της L^{-1} .

Άσκηση 4.5 Έστω $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμικές απεικονίσεις που ορίζονται σαν

$$T(x, y) = (y, x, x + y) \text{ και } S(x, y, z) = (x, 0, y + z).$$

Δώστε τον τύπο και τον πίνακα, ως προς την κανονική βάση, όλων από τις παρακάτω γραμμικές απεικονίσεις ορίζονται (δεν ορίζονται όλες) $(S + T)$, $S \circ T$, $T \circ S$, T^2 , S^2 .

Άσκηση 4.6 Δώστε παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ώστε να ισχύουν τα εξής

1) Υπάρχουν v_1, v_2 γραμ. ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ που οι εικόνες τους $T(v_1), T(v_2)$ είναι γραμ. εξαρτημένα.

- 2) Μεταφέρει την γραμμή $x = 0$ στην γραμμή $y = 0$.
 3) Μεταφέρει την γραμμή $x = y$ στην γραμμή $x = 0$.

Άσκηση 4.7 Έστω A ένας 3×3 πίνακας με $\det(A) = -2$. Υπολογίστε την ορίζουσα καθενός από τους παρακάτω πίνακες: $\frac{1}{2}A$, A^5 , AA^t , A^{-1} .

Άσκηση 4.8 Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+b & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(na+b).$$

(Υπόδειξη: προσθέστε όλες τις γραμμές σε μία)

Άσκηση 4.9 Βρείτε τον $\text{adj} A$ και τον A^{-1} αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 4.10

- 1) Δείξτε, με χρήση οριζουσών, ότι δεν υπάρχει πραγματικός 2×2 πίνακας B τέτοιος ώστε $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 2) Δείξτε ότι αν $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ με n περιττός και $A^t = -A$ τότε $\det A = 0$.