

BIO-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Παραδώστε τις ασκήσεις 3.1, 3.3, 3.6, 3.7

Άσκηση 3.1

- Δείξτε ότι τα $(1, 1)$ και $(-1, 2)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^2$.
- Εξετάστε εάν τα διανύσματα $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3.2 Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Εξετάστε εάν τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Εάν δεν είναι, δώστε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης.
- Εξετάστε εάν $w \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Άσκηση 3.3 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, b_3)$ να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A .
- Βρείτε την γενική λύση του $Ax = b$ όταν $b_1 = 1, b_2 = -2, b_3 = 1$.
- Βρείτε μία βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{N}(A)$.
- Δείξτε ότι το διάνυσμα $v = (4, -3, 2, 2)$ ανήκει στον $\mathcal{N}(A)$ και γράψτε το v σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$ που βρήκατε.
- Βρείτε μία βάση για το χώρο στηλών, $\mathcal{R}(A)$, του πίνακα.
- Βρείτε μία βάση για το χώρο γραμμών, $\mathcal{R}(A^\top)$, του πίνακα.

Άσκηση 3.4 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ του οποίου ο μηδενόχωρος έχει διάσταση 2 και ο χώρος στηλών παράγεται από 2 διανύσματα.

2. Αν για τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ ισχύει $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$, τότε $\dim(\mathcal{N}(A)) = 2$.
3. Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τέτοιος ώστε $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$.
4. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$. Αν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^3$, τότε υπάρχουν ακριβώς 2 ελεύθερες μεταβλητές.

Άσκηση 3.5 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές.

- (1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (3xy, 2y, x - y)$,
- (2) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (3x + y + 1, x - y + z)$,
- (3) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, h(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- (4) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (3x + y + z, x - y + z)$,

Άσκηση 3.6 Δίνεται η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x) = Ax$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

βρείτε τον τύπο της T (δηλ. $T(x, y, z)$).

Άσκηση 3.7 Δίνεται η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x, y) = (-x + 2y, x - y, 2x - 3y)$. Βρείτε τον πίνακα της T .