

Περιεχόμενα

3	Ολοκλήρωση	1
3.1	Το αόριστο ολοκλήρωμα	2
3.2	Το ορισμένο ολοκλήρωμα	4
3.3	Θεμελιώδεις θεώρημα απειροστικού λογισμού	8
3.4	Μέθοδοι ολοκλήρωσης	13
3.5	Εφαρμογές	19

Κεφάλαιο 3

Ολοκλήρωση

3.1 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Εάν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τον ρυθμό μεταβολής $f(x)$ μία συνάρτησης (την παράγωγό της), θα ήταν μήπως δυνατόν να βρούμε ποια είναι η συνάρτηση αυτή, έστω $F(x)$; (τότε θα είναι $F' = f$.)

Ορισμός. Μία συνάρτηση $F(x)$ λέγεται *αντιπαράγωγος* (ή *παράγουσα*) της $f(x)$ εάν

$$F'(x) = f(x), \quad \text{ή} \quad \frac{dF}{dx} = f(x).$$

Παράδειγμα. Αν γνωρίζουμε την επιτάχυνση ενός κινητού $a(t) = dv/dt$, θα μπορούσαμε να βρούμε την ταχύτητά του $v(t)$; Ως συγκεκριμένο παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $a = c$ είναι σταθερά, οπότε θα έχουμε $v(t) = ct$.

Παρατήρηση 3.1. Το ερώτημα στην γενικότητά του, έχει ιδιαίτερα περίπλοκη απάντηση.

Παρατηρήστε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x) + c$ (όπου c είναι σταθερά), είναι επίσης παράγουσα της f .

Ορισμός. Ονομάζουμε το ακόλουθο

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

αόριστο ολοκλήρωμα. Είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια παραγουσών της f . Η $f(x)$ λέγεται *ολοκληρωταία*.

3.1.1 Ολοκληρώματα κάποιων βασικών συναρτήσεων

Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα (ή μία αντιπαράγωγο) σκεφτόμαστε ως εξής:

Την απάντηση για κάποιες περιπτώσεις παίρνουμε από τους πίνακες παραγωγίσης στοιχειωδών συναρτήσεων που ήδη έχουμε δει.

f	F
0	c
1	x
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
e^x	e^x

Η βασική ιδιότητα του αορίστου ολοκληρώματος είναι η

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα. Θα βρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int (3x^3 + 2 - 5\sqrt{x}) dx.$$

Έχουμε άθροισμα ολοκληρωμάτων, ώστε

$$\int (3x^3 + 2 - 5\sqrt{x}) dx = \int 3x^3 dx + 2 \int dx - 5 \int \sqrt{x} dx = x^2 + 2x - \frac{10}{3}x^{3/2}.$$

Παράδειγμα. Θα βρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int \sin(3x) dx.$$

Ξεκινάμε από την παρατήρηση ότι

$$\frac{d}{dx} \cos(3x) = -3 \sin(3x)$$

άρα

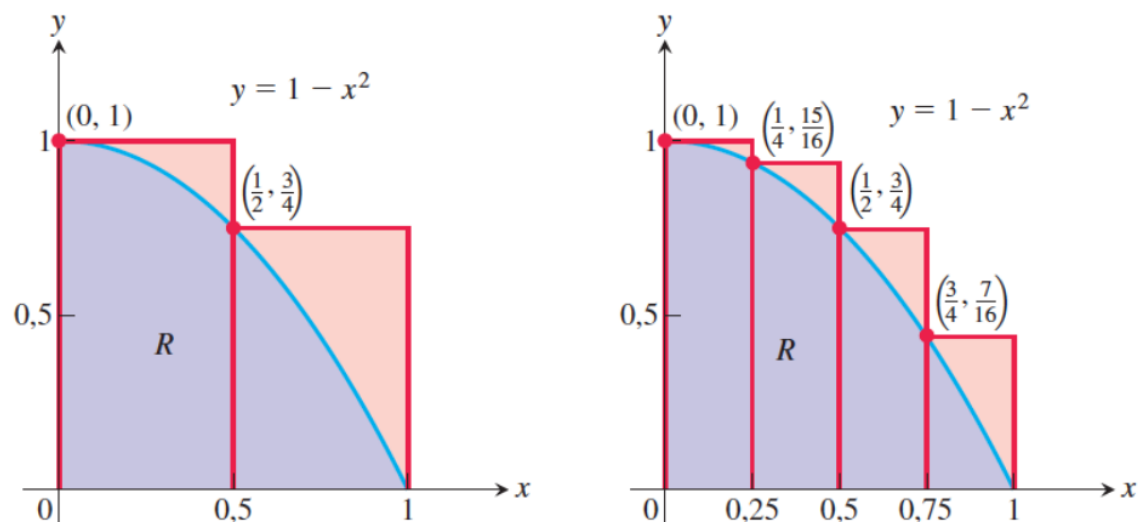
$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) \right] = \sin(3x) \Rightarrow \int \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x).$$

3.2 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

3.2.1 Εμβαδό χωρίου

Παράδειγμα. Αν υποθέσουμε ότι ένα αυτοκίνητο τρέχει με σταθερή ταχύτητα $v = c$, τότε σε χρόνο t έχει διανύσει απόσταση $x = ct$. Παρατηρήστε ότι αυτό ισούται με το εμβαδό κάτω από την γραφική παράσταση $v = v(t)$. Επίσης, το ct δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int v(t) dt$ (με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς στο ολοκλήρωμα).

Συνεχίζοντας το παράδειγμα, μπορούμε να υποθέσουμε ένα αυτοκίνητο το οποίο τρέχει με ταχύτητα $v = c_1$ για χρόνο $0 < t < t_1$ και ακολούθως τρέχει με $v = c_2$ για χρόνο $t_1 < t < t_2$. Η θέση του στον τελικό χρόνο είναι $x = c_1 t_1 + c_2 t_2$, κάτι που ισούται με τον εμβαδό κάτω από την γραφική παράσταση $v = v(t)$ (κάνετε σχήμα).



Για κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ μπορούμε να βρούμε το εμβαδό κάτω από το γράφημα, παίρνοντας διαδοχικά σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots$ και αντίστοιχα $y_0, y_1, y_2, \dots$ και αθροίζοντας τα εμβαδά $x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots$

Ορισμός (Κανονική διαμέριση). Υποθέτουμε ένα διάστημα $[a, b]$ και διαδοχικά σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ τέτοια ώστε $x_0 = a$, $x_n = b$ και η απόσταση διαδοχικών σημείων είναι $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Λέμε ότι έχουμε μία κανονική διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$. Δείτε ότι είναι

$$x_k = a + k \Delta x, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ορισμός (Άθροισμα Riemann). Έστω $f(x)$ η οποία ορίζεται σε διάστημα $[a, b]$ και μία κανονική διαμέριση του διαστήματος. Παίρνουμε $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ εντός των διαστημάτων $[x_{k-1}, x_k]$ και θεωρούμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x.$$

Αυτό λέγεται *άθροισμα Riemann*. Δίνει προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου κάτω από την γραφική παράσταση της $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

Παρατήρηση 3.2. Αν μία συνάρτηση παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές στο $[a, b]$ τότε το άθροισμα *Riemann* δίνει το καθαρό εμβαδό κάτω από το γράφημα, δηλαδή δίνει το εμβαδό στην περιοχή που $f(x) > 0$ μείον το έμβαδό στην περιοχή όπου $f(x) < 0$.

Για να βρούμε το ακριβές εμβαδό πρέπει να πάρουμε

$$\text{εμβαδό} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x.$$

Ορισμός (Ορισμένο ολοκλήρωμα). Μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[a, b]$ είναι *ολοκληρώσιμη* εάν το $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$ υπάρχει για κάθε επιλογή των ξ_k . Αυτό λέγεται *ορισμένο ολοκλήρωμα* της f από το a στο b και γράφεται

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x.$$

Παράδειγμα (Χρήση γεωμετρίας). Θα υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_2^4 (2x + 3) dx$$

με γεωμετρικό υπολογισμό του εμβαδού κάτω από την γραφική παράσταση. Πρόκειται για το εμβαδό τραπεζίου.

3.2.2 Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

- $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
- $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$.
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx$.
- Εάν $f(x) \leq g(x)$ στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- Ανισότητα max-min. Αν $\max f$, $\min f$ είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f στο $[a, b]$, τότε

$$(\min f)(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (\max f)(b - a).$$

Παράδειγμα. Έστω συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε τα ορισμένα ολοκληρώματα $\int_0^5 f(x) dx = 3$ και $\int_0^7 f(x) dx = 10$ Μπορούμε να βρούμε ότι

$$\int_0^5 4f(x) dx = 4 \int_0^5 f(x) dx = 12.$$

Επίσης

$$\int_5^7 f(x) dx = \int_5^0 f(x) dx + \int_0^7 f(x) dx = - \int_0^5 f(x) dx + \int_0^7 f(x) dx = -3 + 10 = 7.$$

Παράδειγμα (max-min). Είναι $0 \leq x^2 \leq x$ στο $[0, 1]$, άρα

$$0 \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx.$$

Βρίσκουμε γεωμετρικά $\int_0^1 x \, dx = 1/2$, οπότε

$$0 < \int_0^1 x^2 \, dx < \frac{1}{2}.$$

Θεώρημα (Ολοκληρωσιμότητα συνεχών συναρτήσεων). Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα $[a, b]$, ή αν η f έχει πεπερασμένες το πλήθος ασυνέχειες άλματος, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) \, dx$ υπάρχει και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Ερώτηση. Βρείτε το ολοκλήρωμα της συνάρτηση βήματος στο διάστημα $[-1, 1]$.

Ορισμός. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε ορίζουμε την μέση τιμή της ως

$$\text{av}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

3.3 Θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού

Για μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση f μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα από έναν σταθερό αριθμό a σε έναν τυχόντα x ,

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

Εδώ έχουμε την μεταβλητή x να εμφανίζεται στο όριο του ολοκληρώματος. Η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται από το x , δηλαδή, $F = F(x)$. Η τιμή της $F(x)$ δίνει το εμβαδό κάτω από το γράφημα στο διάστημα $[a, x]$ (θεωρούμε $F > 0$ και $x > a$).

Θα εξάγουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα αν υπολογίσουμε το $F'(x)$. Βλέπουμε ότι το (κάνετε γράφημα)

$$F(x+h) - F(x)$$

δίνει το εμβαδό κάτω από το γράφημα της f στο διάστημα $[x, x + h]$. Δηλαδή

$$F(x + h) - F(x) \approx hf(x).$$

Διαιρούμε με h και παίρνουμε

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \approx f(x).$$

Παίρνουμε το όριο $h \rightarrow 0$ και βρίσκουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Θεώρημα. (Θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού - 1] Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b) και η παράγωγός της είναι η $f(x)$,

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \underbrace{\int_a^x f(t) dt}_{F(x)} = f(x).$$

Παράδειγμα. Θα βρούμε την παράγωγο της

$$y = \int_a^x (t^3 + 1) dt.$$

Είναι

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + 1.$$

Παράδειγμα. Θα βρούμε την παράγωγο της

$$y = \int_1^{x^2} \cos t dt.$$

Είναι $y = y(u)$ όπου $u = x^2$. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \cos u(2x) = 2x \cos x^2.$$

Θεώρημα. (Θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού - 2] Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, και η F μία αντιπαράγωγος της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Απόδειξη. Το προηγούμενο θεώρημα μας λέει ότι μία αντιπαράγωγος της f είναι η

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Ξέρουμε ότι μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f είναι η $F(x) = G(x) + C$. Παίρνουμε

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C] = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

Το θεώρημα μας λέει ότι για να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα πρέπει

- Να βρούμε μία αντιπαράγωγο της f .
- Να υπολογίσουμε την ποσότητα $F(b) - F(a)$.

[Δηλαδή, δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε ποτέ αθροίσματα Riemann.]

Παράδειγμα. (α) Θα βρούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

(β) Θα βρούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \cos x \, dx = [\sin x]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$$

Στα παραδείγματα, χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό

$$\int_a^b f(t) \, dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Από τα παραπάνω θεωρήματα προκύπτει το εξής.

Θεώρημα (Θεώρημα ολικής μεταβολής). Η ολική μεταβολή μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $F(x)$ σε ένα διάστημα $[a, b]$ είναι το ολοκλήρωμα του ρυθμού μεταβολής της

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) \, dx.$$

Παράδειγμα. Αν ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $v(t) = ds/dt$ (όπου $s(t)$ η θέση του) τότε

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt = s(t_2) - s(t_1)$$

δηλαδή, το ολοκλήρωμα της ταχύτητας είναι η μετατόπιση κατά το χρονικό διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$.

Παράδειγμα. Έστω $c(x)$ το κόστος παραγωγής x τόνων χάλυβα. Το μέσο κόστος παραγωγής επιπλέον h τόνων είναι

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h}.$$

Το οριακό κόστος παραγωγής ορίζεται ως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = c'(x).$$

Βλέπουμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{x_1}^{x_2} c'(x) dx = c(x_2) - c(x_1)$$

δίνει το κόστος της παραγωγής από x_1 σε x_2 μονάδες.

Παράδειγμα. Θα βρούμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των x και x^2 στο διάστημα $[0, 1]$ (κάνετε σχήμα). Είναι

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού μας λέει αρκετά πράγματα.

- Αν ολοκληρώσουμε την f και έπειτα παραγωγίσουμε το αποτέλεσμα, παίρνουμε ξανά την f ,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

- Αν παραγωγίσουμε την F και έπειτα ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα, παίρνουμε ξανά την F (πιθανόν με μία σταθερά),

$$\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a).$$

- Οι έννοιες παραγωγίσης και ολοκλήρωσης είναι κατά κάποια έννοια αντίστροφες. Ας γράψουμε σχηματικά

$$f(x) \xrightarrow{\int} \int_a^x f(t) dt \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f(x).$$

Παράδειγμα. Ας ξεκινήσουμε από την συνάρτηση $f(x) = 2x$. Γνωρίζουμε ότι η αντιπαράγωγος είναι $F(x) = x^2 + c$. Το θεώρημα-2 λέει

$$\int_0^x 2x \, dx = (x^2 + c) - c = x^2,$$

δηλαδή, το ολοκλήρωμα δίνει μία αντιπαράγωγο της $f(x)$. Φυσικά, αν παραγωγίσουμε το αποτέλεσμα παίρνουμε πάλι την $f(x)$,

$$(x^2)' = 2x.$$

3.4 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

3.4.1 Μέθοδος αντικατάστασης

Έχουμε δει ότι το $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C$ μπορέσαμε να το βρούμε αφού γνωρίζουμε ότι $\int \cos x dx = \sin x + C$. Θα δούμε μια γενικότερη μέθοδο για να σχετίζουμε νέα (άγνωστα) ολοκληρώματα με τα βασικά που ήδη γνωρίζουμε.

Η μέθοδος βασίζεται στον κανόνα αλυσίδας για συνάρτηση $F(u(x))$,

$$\frac{d}{dx} F(u(x)) = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx} = F'(u) u'(x).$$

Άρα, είναι

$$\int F'(u) u'(x) \, dx = F(u) + C.$$

Για να δούμε την χρησιμότητα της παραπάνω σχέσης την γράφουμε ως ($F' = f$)

$$\int f(u) \underbrace{u'(x) dx}_{du} = F(u) + C = \int f(u) du.$$

(Η τελευταία προκύπτει διότι η F είναι αντιπαράγωγος της f .)

Θεώρημα (Κανόνας αντικατάστασης για αόριστα ολοκληρώματα). Έστω $u = u(x)$, τότε ισχύει η ισότητα των ολοκληρωμάτων

$$\int f(u)u'(x) dx = \int f(u)du.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int 2(2x + 1)^3 dx.$$

Θέτουμε $u = 2x + 1$, έχουμε $u'(x) = 2$ και είναι

$$\int \underbrace{(2x + 1)^3}_{u^3} \underbrace{2dx}_{du} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(2x + 1)^4}{4} + C.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int 2x \cos(x^2) dx.$$

Θέτουμε $u = x^2$, έχουμε $u'(x) = 2x$ και είναι

$$\int \underbrace{\cos(x^2)}_u \underbrace{2x dx}_{du} = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(x^2) + C.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{(x - a)^2}.$$

Θέτουμε $y = x - a$, άρα $dy = dx$ και το ολοκλήρωμα είναι

$$I = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c = \frac{1}{a-x} + c.$$

Παράδειγμα (Διαίρεση πολυωνύμου). Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 4} dx.$$

Βλέπουμε ότι $x^2 + 2x - 1 = (x + 4)(x - 2) + 7$, άρα το ολοκλήρωμα είναι

$$\int \frac{(x + 4)(x - 2) + 7}{x + 4} dx = \int (x - 2) dx + \int \frac{7}{x + 4} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 7 \ln |x + 4| + C.$$

Παράδειγμα. (*) Έστω η

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax + b}}.$$

Θέλουμε F τέτοια ώστε $\frac{dF}{dx} = f$. Μπορούμε να θέσουμε $y = ax + b$. Βλέπουμε ότι μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα ως εξής

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dF}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dF}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{a} \Rightarrow F = \frac{2}{a} \sqrt{y}.$$

Το αποτέλεσμα είναι

$$F(x) = \frac{2}{a} \sqrt{ax + b}.$$

3.4.2 Μερικά κλάσματα

Παράδειγμα. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x dx}{(x + 1)(x + 2)}.$$

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να γράψουμε την ολοκληρωταία ως άθροισμα μερικών κλασμάτων

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}.$$

Όστε

$$I = \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + c.$$

3.4.3 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Παράδειγμα. Για το

$$I = \int \sin^2 x \, dx$$

χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ και έχουμε

$$I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + c.$$

Παράδειγμα. Για το

$$I = \int \cos^5 x \, dx$$

κάνουμε την αντικατάσταση $u = \sin x$ και γράφουμε

$$I = \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (1 - u^2)^2 du = \dots = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + c = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c.$$

Παράδειγμα. Ας δούμε το

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c, \quad u = \cos x.$$

3.4.4 Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Κάποια ολοκληρώματα υπολογίζονται με τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις. Ας δούμε το

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad x = a \sinh y, \quad a > 0.$$

Είναι $dx = a \cosh y \, dy$ και

$$I = \int \frac{a \cosh y \, dy}{\sqrt{a^2 \cosh^2 y + a^2}} = \dots \int dy = y + c = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{x}{a} \right) + c.$$

Δοκιμάστε να υπολογίσετε τα

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad x = a \cosh y$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad x = a \sin y.$$

3.4.5 Κατά παράγοντες ολοκλήρωση

Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες είναι μία τεχνική απλούστευσης ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int u(x)v'(x) \, dx.$$

Για να την εφαρμόσουμε παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Παίρνουμε αόριστα ολοκληρώματα και στα δύο μέλη

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] dx &= \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx \\ \int u(x)v'(x) dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Στο ολοκλήρωμα

$$I = \int x \cos x dx$$

μπορούμε να θέσουμε $u(x) = x$ και $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$. Όστε είναι

$$I = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

Παρατήρηση 3.3. Σκοπός της παραγοντικής ολοκλήρωσης είναι να περάσουμε από ένα ολοκλήρωμα που δεν γνωρίζουμε, $\int uv' dx$ σε ένα άλλο που γνωρίζουμε, $\int u'v dx$.

Παράδειγμα. Στο ολοκλήρωμα

$$I = \int x^2 e^x dx$$

θέτουμε $u(x) = x^2$ και $v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$. Όστε είναι

$$I = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx.$$

Δεν ξέρουμε το νέο ολοκλήρωμα που προέκυψε, αλλά μπορούμε να κάνουμε πάλι κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Θέτουμε $u(x) = 2x$ και $v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$\int 2x e^x dx = 2x e^x - \int 2e^x dx = 2x e^x - 2e^x + C.$$

Το αποτέλεσμα είναι

$$I = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

3.4.6 Αριθμητική ολοκλήρωση: Μέθοδος Monte Carlo

3.5 Εφαρμογές

3.5.1 Μάζα κατανομής πυκνότητας

Μπορούμε να βρούμε την μάζα σώματος ως

$$\text{μάζα} = \text{πυκνότητα} \cdot \text{όγκος}.$$

Αν έχουμε πολλά σωματα με διαφορετικές πυκνότητες ρ_k και όγκους V_k τότε η συνολική μάζα είναι

$$m = \sum_k \rho_k V_k.$$

Παράδειγμα (Μάζα γραμμικής κατανομής πυκνότητας). Θεωρούμε μικρά ραβδωτά κομματάκια καθένα με μήκος Δx και αντίστοιχες γραμμικές πυκνότητες ρ_k . Η συνολική μάζα είναι

$$m = \sum_k \rho_k \Delta x.$$

Τα τοποθετούμε το ένα δίπλα στο άλλο και έχουμε μία ράβδο από $x = 0$ έως $x = L$. Γράφουμε την πυκνότητα της ράβδου ως $\rho(x)$ (δεν είναι ίδια παντού). Αν θεωρήσουμε απειροστά μικρά κομμάτια ράβδου μήκους dx , η μάζα του καθενός είναι $dm = \rho(x)dx$. Η συνολική μάζα της ράβδου είναι

$$m = \int_0^L \rho(x)dx.$$

Έστω κατανομή μάζας $\rho(x) = 1 + x^2$ για ράβδο στο διάστημα $0 < x < 2$. Η μάζα της είναι

$$m = \int_0^2 (1 + x^2)dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{14}{3}.$$

3.5.2 Έργο δύναμης

Το έργο που παράγεται από δύναμη F η οποία δρα σε διάστημα Δx είναι $W = F\Delta x$. Αν η δύναμη είναι διαφορετική σε διαφορετικές θέσεις x_i τότε το έργο είναι $W = \sum_i f(x_i)\Delta x$. Για δύναμη $F(x)$, το έργο που παράγει όταν μετατοπίζει αντικείμενο από θέση $x = a$ σε $x = b$ (στην κατεύθυνση της δύναμης), το έργο δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

Παράδειγμα (Συμπίεση ελατηρίου). Η δύναμη ελατηρίου είναι $F = kx$ και το έργο που παράγει (έστω ότι η μάζα βρίσκεται αρχικά στην θέση ισοροπίας)

$$W = \int_0^a kx dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{ka^2}{2}.$$

Παράδειγμα (Προβλήματα ανύψωσης). [2], Κεφ. 6.7, παράδειγμα 2

3.5.3 Μήκος καμπυλών

Θεωρούμε μία καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (κάνετε σχήμα). Ας χωρίσουμε τον άξονα x σε κομμάτια μήκους Δx . Το μήκος ενός κομματιού της καμπύλης που αντιστοιχεί στο Δx είναι (από το Πυθαγόρειο θεώρημα)

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2}, \quad \Delta y_k = f(x_k + \Delta x) - f(x_k).$$

Το συνολικό μήκος L της καμπύλης είναι

$$L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x} \right)^2 \right)} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x} \right)^2} \Delta x.$$

Το εκριβές της καμπύλης βρίσκεται αν πάρουμε $\Delta x \rightarrow dx$ (απειροστά διαστήματα) και ολοκληρώσουμε

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Παράδειγμα. Ας βρούμε το μήκος της καμπύλης $f(x) = x^{3/2}$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 4$. Είναι $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$ και

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{u} du = \frac{8}{27} u^{3/2} \Big|_1^{10} = \dots$$

3.5.4 Όγκος στερεού από περιστροφή

Εάν περιστρέψουμε καμπύλη $y = f(x)$ γύρω από τον άξονα των x , δημιουργείται ένα σχήμα που ονομάζεται στερεό από περιστροφή. Ο όγκος του V υπολογίζεται χωρίζοντάς το σε λεπτούς δίσκους πάχους Δx κάθετους στον άξονα των x . Για το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, ο αντίστοιχος δίσκος έχει όγκο

$$\pi(f(\xi_k))^2 \Delta x, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Ο συνολικός όγκος είναι

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi(f(\xi_k))^2 \Delta x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Παράδειγμα. Μία σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί ως στερεό από περιστροφή της καμπύλης $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$. Ο όγκος είναι

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Ερώτηση. Υπολογίστε τον όγκο κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους h .

3.5.5 Εμβαδό επιφάνειας

Σκεφτείτε πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις ιδέες των προηγούμενων εφαρμογών ολοκληρωμάτων ώστε να υπολογίσετε το εμβαδό επιφανειών από περιστροφή (δείτε [2], κεφ. 6.6 ή αντίστοιχο στο [1]).

Βιβλιογραφία

- [1] J. Hass, C. Heil, M. D. Weir, “*Thomas: Απειροστικός Λογισμός*”, μετάφραση της 14ης αμερικανικής έκδοσης (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [2] W. Briggs, L. Cochran, B. Gillett, E. Schulz, “*Απειροστικός Λογισμός*” (Εκδόσεις Κριτική, 2018).
- [3] Ι. Δ. Πλατής, «*Μαθηματικά I: Πρόχειρες Σημειώσεις*» (2019).
- [4] E. Steiner, “*The Chemistry Maths Book*”, 2nd Edition (Oxford University Press).