

BIO-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Παραδώστε τις ασκήσεις 2.2.1, 2.4, 2.6

Άσκηση 2.1 Λύστε τα παρακάτω ομογενή συστήματα και δώστε την λύση σε διανυσματική μορφή (γενική παραμετρική λύση).

$$1. \begin{cases} -x_1 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x & + & & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x & + & 2y & + & 5z & + & 3w & = & 0 \\ 6x & + & y & + & 5z & + & 4w & = & 0 \\ 4x & - & y & & & + & w & = & 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2.2 Να λυθούν τα μη-ομογενή γραμμικά συστήματα με τους ακόλουθους επαυξημένους πίνακες:

$$1. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$2. (\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 9 \end{array})$$

$$3. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$4. \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

Μπορείτε να δώσετε την γενική διανυσματική λύση των αντίστοιχων ομογενών χωρίς να λύσετε ξανά τα συστήματα;

Άσκηση 2.3 Βρείτε για ποιές τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$, καθένα από τα παρακάτω συστήματα: (i) δεν έχει λύση, (ii) έχει άπειρες λύσεις, (iii) έχει μοναδική λύση. Λύστε το σύστημα στις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

$$1. \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 1 \\ ax & & & + & z & = & b \\ x & + & y & + & 2z & = & 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y = 0 \\ 3x + y + bz = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2.4 Βρείτε ποιά σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση.

$$\begin{cases} x - z = a \\ -x + y = b \\ -2x + y + z = c \end{cases}$$

Άσκηση 2.5 Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$(3, -1, 2), (1, -1, 4), (2, 0, -1)$$

ώστε

1. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2,
2. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη -2 ,
3. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη 2,

Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Άσκηση 2.6 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς. Όλες οι προτάσεις αναφέρονται σε ένα σύστημα $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

1. Εάν $m > n$ και $b \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο.
2. Εάν $m < n$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
3. Εάν $m < n$ και $b = 0$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
4. Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις.
5. Εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις.
6. Εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση, τότε και το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση.
7. Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση.

Άσκηση 2.7 Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες έχουν αντίστροφο και αν ναι υπολογίστε τον.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.8 Αν A ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ της προηγούμενης άσκησης, λύστε το σύστημα $Ax = b$

όπου $b = (1, 2, 3, 4)$ κάνοντας χρήση του αντιστρόφου A^{-1} που βρήκατε στην προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 2.9 Έστω ότι γνωρίζετε ότι ένας πληθυσμός εξελίσσεται σύμφωνα με την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}, \quad a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$$

Ορίζουμε τα διανύσματα

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

(i) Βρείτε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιο ώστε

$$v_n = A v_{n-1}, \quad \text{για κάθε } n = 3, 4, \dots$$

(ii) Παρατηρήστε ότι $v_n = A^{n-2} v_2$ για $n = 2, 3, \dots$

(iii) Υπολογίστε το v_{100} και από αυτό το a_{100} (χρησιμοποιήστε υπολογιστή!)