

Περιεχόμενα

2	Παράγωγοι	1
2.1	Συνέχεια	1
2.2	Ρυθμός μεταβολής	3
2.3	Κανόνες παραγωγίσης	6
2.4	Χρήσεις των παραγώγων	12

Κεφάλαιο 2

Παράγωγοι

2.1 Συνέχεια

2.1.1 Όρια

Εδώ έχουμε μια θεμελιώδη ιδέα του λογισμού.

Ακολουθούμε τις σημειώσεις I. Πλατή [3], κεφ. 2.1.

2.1.2 Συνέχεια συνάρτησης

Μία συνάρτηση $f(x)$ λέγεται συνεχής σε σημείο x_0 αν

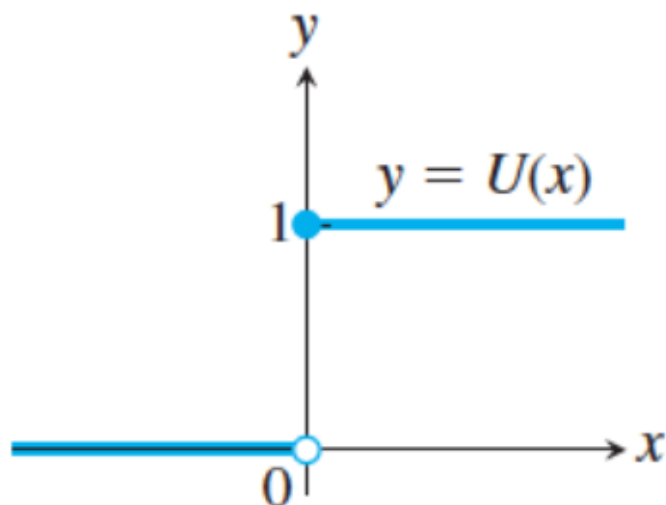
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9 = f(3).$$

Προσοχή! Η έννοια της συνέχειας δεν έχει νόημα αν το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Μία

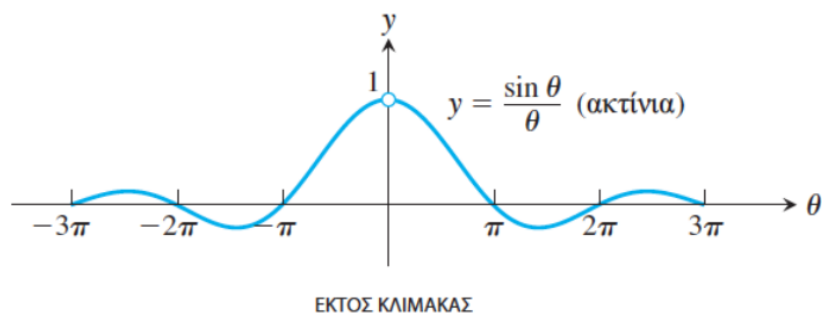
Παρατήρηση 2.1. Η συνέχεια μιας f στο x_0 σημαίνει ότι η γραφική παράστασή της δεν κόβεται στο $(x_0, f(x_0))$. Μία συνάρτηση λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα μία συνεχής συνάρτηση μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να χρειαστεί να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.



Το σχήμα σείχνει την συνάρτηση βήματος: εμφανίζει ασυνέχεια στην αρχή των αξόνων.

Ας δούμε την περίπτωση σημείου που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού αλλά μπορεί να ορισθεί όριο, π.χ., $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$. Όμως, η συνάρτηση δεν ορίζεται στο 0. Μπορούμε να επεκτείνουμε την συνάρτηση ορίζοντας νέα συνάρτηση ως εξής

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$



Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων: Αν f, g είναι συνεχείς και οι δύο σε σημείο x_0 (το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού και των δύο) τότε είναι συνεχείς και οι $(k \in \mathbb{R})$

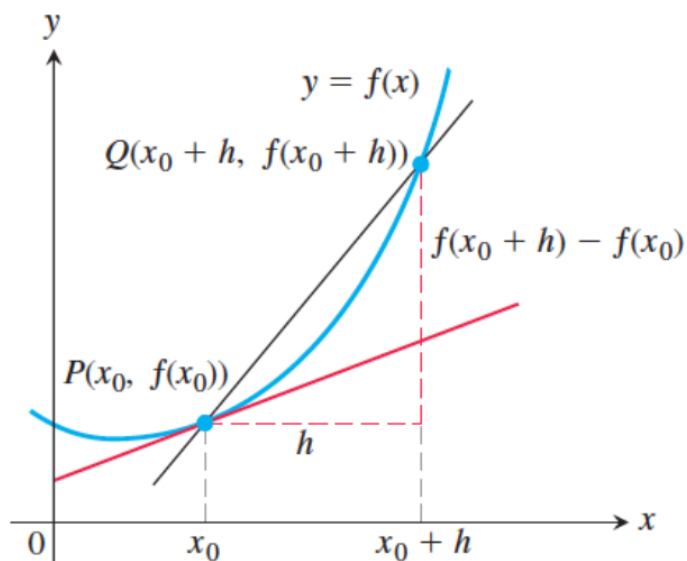
$$f \pm g, \quad kf, \quad f \cdot g, \quad f/g.$$

2.2 Ρυθμός μεταβολής

Έχουμε δει την κλίση ευθείας

$$\text{Κλίση} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Μία καμπύλη έχει επίσης κλίση, αλλά αυτή μπορεί να είναι διαφορετική σε κάθε σημείο της.



Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν παρόμοιο τύπο για την κλίση μίας καμπύλης κοντά σε σημείο $P(x_0, f(x_0))$. Παίρνουμε σημείο $Q(x_1, f(x_1))$ κοντά στο P και γράφουμε

$$\text{Κλίση κοντά στο σημείο } P = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Είναι πιο χρήσιμο να γράψουμε $x_1 = x_0 + h$ και

$$\text{Κλίση κοντά στο σημείο } P = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ορισμός (Παράγωγος). Η κλίση ακριβώς στο P είναι το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι ο ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ με το x στο σημείο x_0 . Αυτός ο ρυθμός μεταβολής

καλείται παράγωγος και συμβολίζεται

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \dot{f}(x_0) = f'(x_0).$$

Παρατήρηση 2.2. Η παράγωγος $f'(x_0)$ δίνει την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη $y = f(x)$ στο σημείο $x_0, f(x_0)$.

Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την

$$f(x) = x^2.$$

Αν σχεδιάσουμε την καμπύλη $y = x^2$ βλέπουμε ότι η κλίση της καμπύλης αυξάνει με το x .

Μπορούμε να βρούμε την παράγωγο της $f(x)$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Παρατήρηση 2.3. Η παράγωγος $f'(x)$ μίας συνάρτησης $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο x (στο πεδίο ορισμού της f) και άρα είναι και αυτή μία συνάρτηση.

Η εφαπτομένη σε ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει τύπο

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Αυτή δίνει την γραμμική (αφφινική) προσέγγιση της συνάρτησης κοντά στο σημείο $(x, f(x))$.

Παράδειγμα. Μπορούμε να βρούμε την παράγωγο της $f(x) = \sqrt{x}$ (δείτε βιβλίο Thomas [1], κεφ. 3.2, παράδειγμα 2) και είναι

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ειδικότερα, στο σημείο $x = 0$ έχουμε

$$f'(x = 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow \infty.$$

Άρα, η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Όμως δέχεται εφαπτόμενη, την ευθεία $x = 0$.

Ερώτηση. Κάνετε γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$ και της παραγώγου της $f'(x)$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = |x|$ η οποία γράφεται και ως

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}.$$

Δείτε (αφού κάνετε την γραφική παράσταση) ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής. Η εφαπτομένη της για $x > 0$ έχει κλίση 1 και για $x < 0$ έχει κλίση -1 . Στο $x = 0$ η παράγωγος της f δεν ορίζεται.

- Αποδεικνύεται ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0 .
- Κάθε συνεχής συνάρτηση στο x_0 δεν είναι βέβαιο ότι είναι και παραγωγίσιμή στο x_0 (όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα).

2.3 Κανόνες παραγωγίσης

Αφού χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου, μπορούμε να εξάγουμε τους ακόλουθους χρήσιμους κανόνες παραγωγίσης.

Κανόνες για πολυώνυμα.

f	f'
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\dots$	$\dots$
x^n	nx^{n-1}

- Άθροισμα συναρτήσεων

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

Ερώτηση. Βρείτε την παράγωγο της $(1/f)$.

2.3.1 Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

f	f'
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

- Βαθμωτό γινόμενο

$$\frac{d(kf)}{dx} = k \frac{df}{dx}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Γινόμενο

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx}.$$

- Πηλίκο

$$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

Ερώτηση. Βρείτε την παράγωγο της $\tan x$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας (ή τον κανόνα πηλίκου).

Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης

Ξεκινάμε από την σειρά

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

και παραγωγίζουμε έναν έναν τους όρους του πολυωνύμου,

$$\frac{d(e^x)}{dx} = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

άρα βρίσκουμε ότι για την $f(x) = e^x$

$$\frac{df}{dx} = f.$$

Παράδειγμα. Μία εξίσωση της μορφής

$$\frac{dN}{dt} = N$$

δίνει τον ρυθμό αύξησης ζωντανών οργανισμών (π.χ., κορωνοϊού, κουνελιών, εντόμων κλπ). Είδαμε ότι η $(t) = e^t$ έχει παράγωγο .

Παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων

f	f'
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Ερώτηση. Βρείτε την παράγωγο της $\tanh x$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα πηλίκου.

Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

Ο ορισμός της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Παίρνουμε την παράγωγο της αντίστροφης ως προς y ,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}}{dy} \Rightarrow \frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Για τον λογάριθμο έχουμε ($y = e^x$, $\ln y = x$)

$$\frac{d(\ln y)}{dy} = \frac{1}{d(e^x)/dx} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Συνήθως γράφουμε

$$(\ln x)' = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

[Για την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης μπορείτε να δείτε π.χ., στο βιβλίο W. Briggs, κεφ. 7.1, θεώρημα 7.3.]

Παράγωγος άρτιας και περιττής συνάρτησης

Η παράγωγος μία άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

Ερώτηση. Γράψτε μία άρτια πολυωνυμική συνάρτηση και βρείτε την παράγωγό της.

Η παράγωγος μία περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση.

Ερώτηση. Γράψτε μία περιττή πολυωνυμική συνάρτηση και βρείτε την παράγωγό της.

2.3.2 Αλυσιδωτή παραγωγή

Για μία συνάρτηση όπως η

$$y = (x^2 + 1)^{3/2}$$

φαίνεται δύσκολο να κάνουμε την παραγωγή. Μπορούμε όμως να την γράψουμε

$$y = u^{3/2}, \quad u = x^2 + 1.$$

Τώρα η y είναι συνάρτηση του u και η u είναι συνάρτηση του x .

Ο κανόνας της αλυσίδας μας λέει πώς μπορούμε να παραγωγίσουμε την y ως προς την x ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε

$$\frac{dy}{du} = \frac{3}{2}u^{1/2}, \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}u^{1/2} \cdot 2x = \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 3x(x^2 + 1).$$

Παράδειγμα. Ένα ολοστρόγγυλο μπαλόνι φουσκώνει και η ακτίνα του αυξάνει σύμφωνα με την $r = 2t$. Για να βρούμε τον ρυθμό αύξησης του όγκου του γράφουμε

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Παραγωγίζουμε τον όγκο και έχουμε

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 8\pi r^2.$$

Παράδειγμα. Μία εξίσωση της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad a \text{ θετική σταθερά}$$

δίνει τον ρυθμό αύξησης ζωντανών οργανισμών (π.χ., κορωνοϊού, κουνελιών, εντόμων κλπ). Δείτε ότι η $x(t) = e^{at}$ έχει παράγωγο ax .

Παράδειγμα. Μία εξίσωση της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k \text{ θετική σταθερά}$$

δίνει τον ρυθμό μείωσης μιας ραδιενεργής ποσότητας. Δείτε ότι η $x(t) = e^{-kt}$ έχει παράγωγο $-kx$.

Ερώτηση. Βρείτε τις παραγώγους των $\sinh x$, $\cosh x$.

2.3.3 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Αφού η παράγωγος dy/dx μία συνάρτησης $y = f(x)$ είναι και η ίδια μία συνάρτηση, θα μπορούσε κι αυτή να παραγωγιστεί, οπότε παίρνουμε την $f''(x)$. Γράφουμε την δεύτερη παράγωγο (παράγωγο

της παραγώγου) ως

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να πάρουμε την τρίτη παράγωγο, κλπ.

Παράδειγμα. (Ταχύτητα και επιτάχυνση) Αν η θέση ενός σωματίου είναι $y = y(t)$, όπου t είναι ο χρόνος, τότε η ταχύτητα είναι

$$v(t) = \frac{dy}{dt}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Ας δώσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ένα σώμα πέφτει και η θέση του δίνεται από την $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Η ταχύτητά του είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του,

$$v \equiv \frac{dy}{dt} = -gt.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η παράγωγος

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = -g, \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g.$$

2.4 Χρήσεις των παραγώγων

2.4.1 Μέγιστα, ελάχιστα, σημεία καμπής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση $y = y(x)$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Αν μία συνάρτηση είναι μονότονη τότε μπορεί να είναι

- Αύξουσα, οπότε $dy/dx \geq 0$.
- Φθίνουσα, οπότε $dy/dx \leq 0$.

Ορισμός. Έστω c ένα εσωτερικό σημείο διαστήματος I στο οποίο ορίζεται μία συνάρτηση f . Εάν $f(c) \geq f(x)$ για κάθε x στο I , τότε $f(c)$ είναι ένα τοπικό μέγιστο της f . Εάν $f(c) \leq f(x)$ για κάθε x στο I , τότε $f(c)$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο της f . (Τα μέγιστα και ελάχιστα λέγονται επίσης ακρότατα.)

Θεώρημα. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο c του πεδίου ορισμού της, τότε

$$f'(c) = 0.$$

Ορισμός. Ένα εσωτερικό σημείο c του πεδίου ορισμού μίας συνάρτησης f στο οποίο $f'(c) = 0$ λέγεται κρίσιμο σημείο της f .

- Για να είναι ένα κρίσιμο σημείο μέγιστο, πρέπει η τιμή της παραγώγου να αλλάζει από θετική (αριστερά του σημείου) σε αρνητική (δεξιά του σημείου).
- Για να είναι ένα κρίσιμο σημείο ελάχιστο, πρέπει η τιμή της παραγώγου να αλλάζει από αρνητική σε θετική.
- Εάν η f' είναι θετική (ή αρνητική) και στις δύο πλευρές κοντά στο c , τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο c .

Μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής κριτήριο. Για τα κρίσιμα σημεία της f , έχουμε τις εξής περιπτώσεις

- $d^2 f/dx^2 < 0$, τότε έχουμε μέγιστο.
- $d^2 f/dx^2 > 0$, τότε έχουμε ελάχιστο.
- $d^2 f/dx^2 = 0$, τότε το κριτήριο αποτυγχάνει.

Αν το πρόσημο της 2ης παραγώγου αλλάζει στο κρίσιμο σημείο, τότε αυτό είναι σημείο καμπής.

Παράδειγμα. Για την συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0$, δηλαδή έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο στο $x = 0$. Είναι $f''(x) = 2$, άρα στο $x = 0$ είναι $f''(0) > 0$. Άρα η $f(x)$ έχει ελάχιστο στο $x = 0$.

Παράδειγμα. Για την συνάρτηση $f(x) = x - x^2$ έχουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$, δηλαδή έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο στο $x = 1/2$. Είναι $f''(x) = -2$, άρα στο $x = 1/2$ είναι $f''(0) < 0$. Άρα η $f(x)$ έχει μέγιστο στο $x = 1/2$.

Παράδειγμα. Για την συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0$, δηλαδή έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο στο $x = 0$. Είναι $f''(x) = 6x$, άρα στο $x = 0$ είναι $f''(0) = 0$. Άρα η $f(x)$ έχει σημείο καμπής στο $x = 0$.

Παράδειγμα. Ας βρούμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Έχουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Είναι $f''(x) = 6x$, άρα στο $f''(\pm 1) = \pm 6$. Άρα η $f(x)$ έχει ένα μέγιστο στο $x = -1$ και ένα ελάχιστο στο $x = 1$.

Ερώτηση. Πόσα κρίσιμα σημεία μπορεί να έχει μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού;

Ερώτηση. Για την συνάρτηση $f(x) = x^4$, τι σημείο είναι το $x = 0$;

Ερώτηση. Έστω ότι μία συνάρτηση έχει παράγωγο $f'(x) > 0$ σε όλο το πεδίο ορισμού της. Τι μπορούμε να πούμε για την μονοτονία της;

2.4.2 Σχεδίαση γραφημάτων

- Βρίσκουμε τις παραγώγους y' , y'' και προσδιορίζουμε τα κρίσιμα σημεία (μέγιστα, ελάχιστα, σημεία καμπής).
- Εξετάζουμε την συμπεριφορά της y στα $\pm\infty$, δηλαδή, εξετάζουμε για οριζόντιες ασυμπτώτους.
- Βρίσκουμε τις τιμές μηδενισμού της y , δηλαδή, τα σημεία τομής με τον άξονα των x . Βρίσκουμε την $y(0)$, δηλαδή, το σημείο τομής με τον άξονα των y .

Παράδειγμα. Δείτε την $f(x) = x^3 - x$.

Παράδειγμα. Δείτε την

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}, \quad x \neq -1, 2.$$

(Σημειώσεις Ι.Δ. Πλατή, κεφ. 2.6.3.)

2.4.3 Διαφορικά

Αν μία συνάρτηση $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη, τότε η παράγωγός της είναι

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Αυτό μπορεί να γραφεί ως (αν θεωρήσουμε ένα μικρό h)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x).$$

Για μεταβολή $\Delta x = h$, η μεταβολή της f είναι

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

και έχουμε

$$\Delta y = f'(x)\Delta x.$$

Σημειώστε ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι προσεγγιστικές.

Παράδειγμα. Ο όγκος σφαίρας ακτίνας r είναι

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Αν η ακτίνα μεταβληθεί κατά λίγο, έστω Δr , τότε ο όγκος της σφαίρας μεταβάλλεται κατά ΔV όπου

$$\Delta V \approx \frac{dV}{dr} \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r.$$

Η πραγματική μεταβολή του όγκου της σφαίρας είναι

$$\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \dots = 4\pi r^2 \Delta r + 4\pi r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3.$$

Ερώτηση. Ποιος είναι ο όγκος σφαιρικού κελύφους ακτίνας r με πάχος Δr ;

Ορισμός. Έχτω $y = f(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Το διαφορικό dx είναι μία απειροστή μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Το διαφορικό dy ισούται με

$$dy = f'(x) dx.$$

(Το διαφορικό είναι μια μεταβολή στο όριο και η παραπάνω σχέση θεωρείται ισότητα.)

2.4.4 Παραγωγήιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

Ας βρούμε την παράγωγο της $y(x)$ η οποία ορίζεται από την

$$x^2 + y^2 = 1.$$

[Δείτε W. Briggs [2], κεφ. 3.8, παράδειγμα 1.]

Ας βρούμε την παράγωγο της $y(x)$ η οποία ορίζεται από την

$$x^2 + xy - y^3 = 7.$$

[Δείτε W. Briggs [2], κεφ. 3.8, παράδειγμα 3.]

Ας βρούμε την παράγωγο της $y(x)$ η οποία ορίζεται από την

$$y^2 - 2xy + 1 = 0.$$

Βιβλιογραφία

- [1] J. Hass, C. Heil, M. D. Weir, “*Thomas: Απειροστικός Λογισμός*”, μετάφραση της 14ης αμερικανικής έκδοσης (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [2] W. Briggs, L. Cochran, B. Gillett, E. Schulz, “*Απειροστικός Λογισμός*” (Εκδόσεις Κριτική, 2018).
- [3] Ι. Δ. Πλατής, «*Μαθηματικά Ι: Πρόχειρες Σημειώσεις*» (2019).
- [4] E. Steiner, “*The Chemistry Maths Book*”, 2nd Edition (Oxford University Press).