

BIO-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Παραδώστε τις ασκήσεις 1.3, 1.5, 1.7

Άσκηση 1.1 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \pi/6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.2 Υπολογίστε τα γινόμενα FGH και HGF (έχουμε παραλείψει τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.3 Ο πίνακας $P_{i,j} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα I όταν αντιμεταθέσουμε τις στήλες i και j . Υπολογίστε τα γινόμενα $P_{2,3} \cdot A$ και $A \cdot P_{1,3}$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 1.4 Βρείτε παραδείγματα πραγματικών 2×2 πινάκων που να ικανοποιούν

1. $B^2 = 0$ με $B \neq 0$,
2. $EF = 0$ χωρίς κανένα στοιχείο των E, F να είναι 0.

Άσκηση 1.5 Έστω $A \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $3A = A^2 + AB$, όπου

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα A .

Άσκηση 1.6 Βρείτε τις δυνάμεις $A, A^2, A^3, \dots, A^n$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Άσκηση 1.7 Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι $A^3 - 3A^2 + 4I_3 = O$. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφο του.

Άσκηση 1.8 Για τα παρακάτω ερωτήματα χρησιμοποιήστε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων.

1. Έστω ότι έχετε πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m \times p}, B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Υπολογίστε πόσους πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών πρέπει να κάνουμε για τον υπολογισμό του γινομένου AB .
2. Έστω ότι έχετε πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3}, C \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_4}$ και θέλετε να υπολογίσετε το γινόμενο ABC . Υπολογίστε το κόστος (σε πολλαπλασιασμούς αριθμών) του υπολογισμού $(A \cdot B) \cdot C$ και του $A \cdot (B \cdot C)$. Εάν $n_1 = 100, n_2 = 10, n_3 = 100, n_4 = 20$, ποιο από τους δύο υπολογισμούς θα κάνετε;