

Κεφάλαιο 1

Συναρτήσεις

1.1 Εισαγωγή

Παράδειγμα 1.1 (Νόμος Arrhenius). Ο ρυθμός k μιας χημικής αντίδρασης συχνά δίνεται από

$$k = A e^{-E_a/RT}$$

όπου T θερμοκρασία, E_a η ενέργεια ενεργοποίησης και A, R σταθερές.

Παράδειγμα 1.2 (Εξίσωση ιδανικού αερίου). Για να περιγράψουμε ένα αέριο μετράμε

n : ποσότητα σε mole

V : όγκο

p : πίεση

T : θερμοκρασία.

Έχει βρεθεί ότι ισχύει η εξίσωση για το ιδανικό αέριο

$$pV = nRT$$

όπου $R = 8.31 \text{ J}/(\text{K mol})$.

Μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση ως

$$V = \frac{nRT}{p}.$$

Για παράδειγμα, αν έχουμε ποσότητα αερίου $n = 0.1 \text{ mol}$ σε θερμοκρασία $T = 298 \text{ K}$ και πίεση $p = 10^5 \text{ Pa}$, αυτό καταλαμβάνει όγκο

$$V = \frac{0.1 \text{ mol} \times 8.31 \text{ J}/(\text{K mol}) \times 298 \text{ K}}{10^5 \text{ Pa}} = 2.48 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Λέμε ότι ο όγκος V είναι μία συνάρτηση των p, T, n και γράφουμε

$$V = f(p, T, n).$$

Ο όγκος που βρίσκουμε αλλάζει όταν αλλάζει η τιμή μίας εκ των p, T, n . Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$V = V(p, T, n).$$

- Οι p, T, n λέγονται **μεταβλητές**, διότι μπορούν να πάρουν διαφορετικές τιμές (π.χ., η θερμοκρασία μπορεί να ρυθμιστεί).
- Η R λέγεται **σταθερά**. Λαμβάνει μέρος στην εξίσωση αλλά έχει την ίδια τιμή για κάθε περίπτωση (για κάθε κατάσταση του αερίου).

Διαχωρίζουμε τις μεταβλητές σε δύο κατηγορίες.

- Οι p, T, n είναι **ανεξάρτητες μεταβλητές** διότι κάθε μία μπορεί να πάρει τιμή ανεξάρτητα από την άλλη (π.χ., υποθέτουμε ότι με ένα κουμπί ρυθμίζουμε την θερμοκρασία).

- Η V είναι **εξαρτημένη μεταβλητή** διότι η τιμή της καθορίζεται από τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν κάποιες τιμές αλλά πιθανόν όχι όλες τις τιμές.

- Η πίεση ενός αερίου είναι πάντα θετική, άρα $p > 0$. Γράφουμε επίσης $p \in \mathbb{R}^+$.
- Αν υποθέσουμε ότι τα αέριο είναι σε ένα μπαλόνι που σπάει μετά από κάποια πίεση έστω b , τότε

$$0 < p < b$$

και γράφουμε $p \in [0, b]$.

- Τα ενεργειακά επίπεδα του ατόμου του Υδρογόνου είναι

$$E(n) = -\frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου η μεταβλητή n παίρνει μόνο θετικές ακέραιες τιμές, $n \in \mathbb{N}^+$.

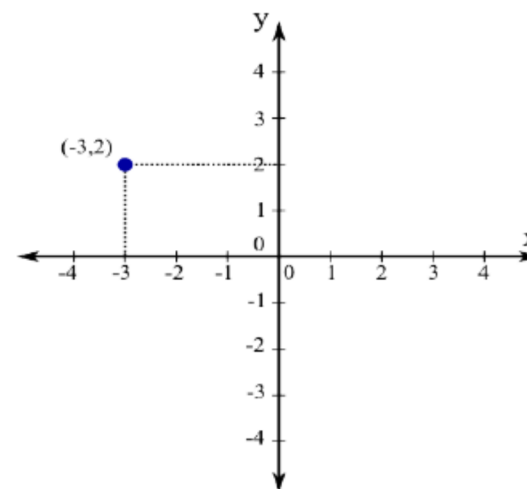
Ορισμός 1. Έστω μία μεταβλητή x η οποία λαμβάνει τιμές σε ένα σύνολο A και μία μεταβλητή y η οποία λαμβάνει τιμές σε ένα σύνολο B . Λέμε ότι η y είναι συνάρτηση του x και γράφουμε

$$y = f(x), \quad \text{ή} \quad y = y(x)$$

αν σε κάθε x_1 του A αντιστοιχίζεται **ένα και μόνο** y_1 του B .

1.1.1 Γραφικές παραστάσεις

Ζεύγη μεταβλητών x, y μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βρίσκονται σε δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες. Κάθε σημείο P_1 του επιπέδου καθορίζεται από δύο αριθμούς x_1, y_1 επάνω στους άξονες των x και y αντίστοιχα, όπως στο σχήμα, όπου $P_1(x_1, y_1) = (-3, 2)$.

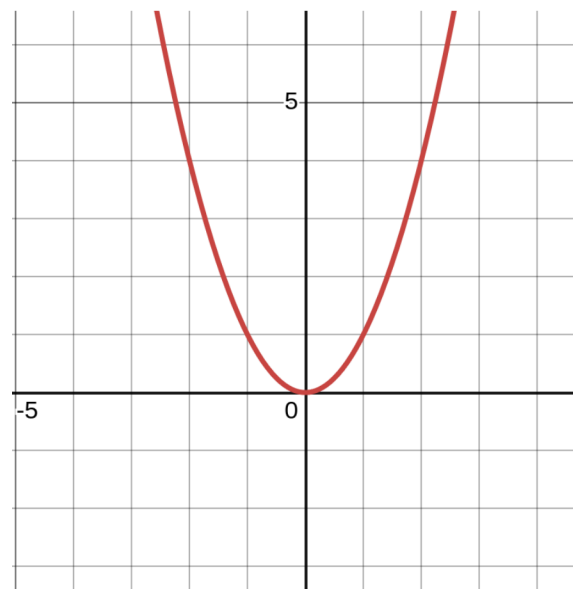


Ας δούμε την συνάρτηση

$$y = x^2.$$

Μπορούμε να την παραστήσουμε σημειώνοντας στο σύστημα συντεταγμένων όλα τα ζεύγη (x, y) (δείτε στο σχήμα). Η καμπύλη που προκύπτει από τα σημεία (x, y) με $y = f(x)$ καλείται **γράφημα της f** και σημειώνεται

$$\text{Gr}(f) = (x, f(x)).$$



1.2 Βασικές συναρτήσεις

1.2.1 Γραμμική συνάρτηση

Έχουμε τον τύπο

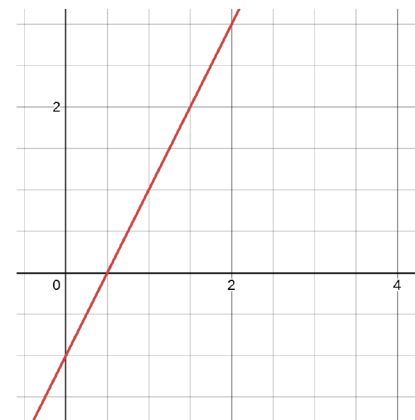
$$y = mx + b.$$

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία. Τέμνει τους άξονες στα σημεία $(-b/m, 0)$, $(0, b)$.

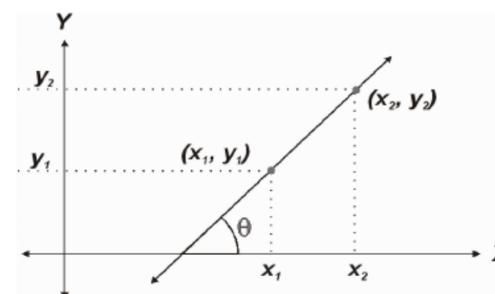
Αν έχουμε δύο σημεία (x_1, y_1) , (x_2, y_2) της ευθείας μπορούμε να βρούμε την κλίση της,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta.$$

1.2.2 Τετραγωνική συνάρτηση



Γραφική παράσταση της $y = 2x - 1$.



Ερώτηση. Τι μπορεί να παριστάνει η συνάρτηση $y = x^2$;

Ερώτηση. Τι μπορεί να παριστάνει η συνάρτηση $y = x^2 + 3x + 2$;

[Για να απαντήσετε, αναπτύξτε το $(x + a)(x + b)$.]

	x	a
x	x^2	ax
b	bx	ab

Έχουμε τον τύπο

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

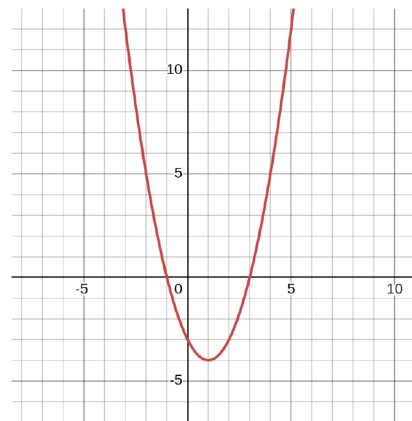
Η γραφική παράσταση είναι μία παραβολή. Τέμνει τον άξονα y στο σημείο $(0, c)$. Τέμνει τον άξονα x σε σημεία $(x_1, 0), (x_2, 0)$.

Παράδειγμα 1.3. Έστω

$$y = x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Βλέπουμε ότι

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3).$$



Άρα $y = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3$.

Γραφική παράσταση της $y = x^2 - 2x - 3$.

Για τη γενική λύση της $y = 0$ ορίζουμε την διακρίνουσα $D = b^2 - 4ac$ και έχουμε

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{αν } D > 0.$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}, \quad \text{αν } D = 0.$$

Δεν έχουμε λύση αν $D < 0$.

Ερώτηση. Σε ποια σημεία τέμνει τον άξονα x η γραφική παράσταση για $D > 0, D = 0, D < 0$;

1.2.3 Πολυωνυμική συνάρτηση

Η πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n έχει τύπο

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Για παράδειγμα, $p(x) = x^3 + 2x + 1$.

Παρατήρηση 1.1. Η γραμμική και η τετραγωνική συνάρτηση είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού αντίστοιχα.

1.2.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται με την βοήθεια ορθογωνίου τριγώνου ή επάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο (δώστε σχήμα). Αν θ είναι η γωνία μίας ακτίνας του κύκλου, τότε

$$\sin \theta = y$$

$$\cos \theta = x$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου είναι περιοδικές. (Δώστε σχήμα. Εξηγήστε γιατί είναι περιοδικές.)

Ερώτηση. Πού ορίζεται η συνάρτηση εφαπτομένης;

Ερώτηση. Δείτε ότι $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Παράδειγμα 1.4 (Αρμονική ταλάντωση). Μία μάζα σε ένα ελατήριο κάνει αρμονική ταλάντωση, δηλαδή, η θέση της ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

όπου A, ω είναι σταθερές (εξηγήστε τι δίνουν).

Παράδειγμα 1.5 (Κύμα). Ένα κύμα είναι συνάρτηση του χώρου x και του χρόνου t . Ένα αρμονικό κύμα δίνεται από

$$\phi(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - vt \right) \right]$$

όπου λ είναι το μήκος κύματος και v η ταχύτητα του κύματος.

Τριγωνομετρικοί τύποι

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta, & \cos(-\theta) &= \cos \theta. \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta, & \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta. \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1.\end{aligned}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

1.2.5 Εκθετική συνάρτηση

Μία εκθετική συνάρτηση είναι η

$$f(x) = a^x$$

όπου a λέγεται βάση. Για παράδειγμα, $f(x) = 10^x$.

Η εκθετική συνάρτηση (που χρησιμοποιείται ευρέως στις φυσικές επιστήμες) είναι η

$$\exp(x) = e^x$$

όπου $e \approx 2.72$ είναι ο αριθμός του Euler (ή βάση των νεπερείων λογαρίθμων). Μπορεί να οριστεί ως

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Παρατήρηση 1.2. Η εκθετική συνάρτηση είναι η μοναδική με την ιδιότητα: ο ρυθμός μεταβολής του $y = e^x$ ως προς x είναι y .

Παράδειγμα 1.6. Η εκθετική συνάρτηση περιγράφει, π.χ., την αύξηση του πληθυσμού βακτηρίων, ιών κλπ.

Είναι $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ και $e^{-x} = 1/e^x$.

Ερώτηση. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση των $f(x) = e^{\pm x}$.

Παράδειγμα 1.7. Μπορούμε να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση e^{kt} . Είναι ταχύτερη ή βραδύτερη από την e^t αναλόγως αν $k > 1$ ή $0 < k < 1$. Η σταθερά k δίνει τον ρυθμό της διαδικασίας (π.χ., ρυθμός αντίδρασης).

Υπερβολικές συναρτήσεις

Κατασκευάζονται από την εκθετική.

- Υπερβολικό συνημίτονο

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- Υπερβολικό ημίτονο

$$\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Δείτε ότι δεν είναι περιοδικές συναρτήσεις. Ισχύει

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

1.2.6 Αντίστροφη συνάρτησης

Για την γραμμική συνάρτηση, π.χ., $y = 5x + 1$ παίρνουμε ένα y για κάθε x . Αν λύσουμε ως προς x παίρνουμε

$$x = \frac{y - 1}{5}$$

δηλαδή, για κάθε y παίρνουμε ένα x . Λέμε ότι η παραπάνω συνάρτηση $x(y)$ είναι η αντίστροφη της $y(x)$.

Ερώτηση. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση των $y = x^3$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ και από αυτές εξάγετε τις γραφικές παραστάσεις των αντιστρόφων (αν υπάρχουν).

Για κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 (ένα προς ένα)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$$

υπάρχει η αντίστροφή της. Τότε, η $y = f(x)$ λέγεται αντιστρέψιμη με αντίστροφή f^{-1} και γράφουμε

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y).$$

Ερώτηση. Μπορούμε να ορίσουμε αντίστροφες των συναρτήσεων $\sin x$, $\cos x$? (Αυτές λέγονται $\arcsin$, $\arccos$.)

1.2.7 Λογάριθμος

Η συνάρτηση του φυσικού λογαρίθμου ορίζεται ως η αντίστροφη της εκθετικής

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

(Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις τους.)

Χρήσιμες σχέσεις.

- $\ln(1) = 0$.
- $\ln(e) = 1$.
- $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ και $\ln(x_1/x_2) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$.
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Παρατήρηση 1.3. Δείτε ότι ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.

Ο δεκαδικός λογάριθμος $\log_{10}$ ή απλώς $\log$ είναι ο αντίστροφος της εκθετικής $f(x) = 10^x$. Μία εφαρμογή στην Χημεία είναι ο ορισμός

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+].$$

Παράδειγμα. Αν η συγκέντρωση ιόντων Υδρογόνου (σε μονάδες moles per litre) είναι $\text{H}^+ = 10^{-7}$ τότε $\log[\text{H}^+] = -7$ και $\text{pH} = 7$.

1.2.8 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Μία συνάρτηση μπορεί να εξαρτάται από πολλές μεταβλητές. Για παράδειγμα

$$V = V(n, T, P) = \frac{nRT}{p}.$$

Ερώτηση. (α) Πώς εξαρτάται ο όγκος V από την θερμοκρασία T ; (β) Πώς εξαρτάται ο όγκος V από την πίεση p ;

Βιβλιογραφία

- [1] J. Hass, C. Heil, M. D. Weir, “*Thomas: Απειροστικός Λογισμός*”, μετάφραση της 14ης αμερικανικής έκδοσης (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [2] Ι. Δ. Πλατής, «*Μαθηματικά Ι: Πρόχειρες Σημειώσεις*» (2019).
- [3] E. Steiner, “*The Chemistry Maths Book*”, 2nd Edition (Oxford University Press).