

1 Σύνολα-σχέσεις ισοδυναμίας-συναρτήσεις

Άσκηση 1. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Venn στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Έστω δύο σύνολα A, B με $A \cup B \subseteq B$ και $B \not\subseteq A$.

(ii) Έστω σύνολα A, B, C μη κενά ξένα ανά δύο και $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ σε καθεμία από τις περιπτώσεις:

(i) $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

(ii) $X = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$.

Άσκηση 3. (i) Ένα σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται G_δ αν γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων, ενώ ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται F_σ αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων. Να δείξετε ότι το $\{0\}$ είναι G_δ και το $(0, 1]$ είναι F_σ .

(ii) Να δείξετε αυστηρά(συνολοθεωρητικά) ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2^n}, 3 - \frac{1}{2^n}\right] = (1, 3) \text{ και } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2^n}, 2 - \frac{1}{2^n}\right] = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

Άσκηση 4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = [0, 1 - \frac{1}{2^n}]$, $B_n = [0, 1 - \frac{1}{3^n}]$. Να δείξετε ότι $A_n \subseteq B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Άσκηση 5. Αν A, B δύο μη κενά σύνολα τέτοια ώστε $|A| = n$ και $|B| = m$. Να βρείτε πόσες σχέσεις ισοδυναμίας ορίζονται ανάμεσα στο A και στο B .

Άσκηση 6. Έστω X, Y γραμμικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Ορίζουμε μία σχέση στο X ως εξής: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \text{Ker}(f)$. Να δείξετε ότι:

(i) $H \sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

(ii) Για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$[x] = x + \text{Ker}(f) = \{x + y : y \in \text{Ker}(f)\}.$$

(iii) $H f$ είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

(iv) Θεωρούμε το σύνολο

$$X/\text{Ker}(f) = \{[x] : x \in X\}$$

και την απεικόνιση $\varphi : X/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ με $\varphi([x]) = f(x)$. Να δείξετε ότι η φ είναι ένα προς ένα και επί απεικόνιση γραμμική απεικόνιση.

Άσκηση 7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $f(n) = 2n+1$ και $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \equiv 0(\text{mod } 4) \\ 2, & \text{αν } n \equiv 1(\text{mod } 4) \\ 4, & \text{αν } n \equiv 2(\text{mod } 4) \\ 6, & \text{αν } n \equiv 3(\text{mod } 4) \end{cases}$$

Αν $A = \{-3, -2, -1, 10, 1, 2, 3\}$ να βρείτε τα παρακάτω σύνολα:

(i) $(f \circ g)(\{1, 2, 5, 6\})$

(ii) $(f \circ g)^{-1}(\{1, 2, 5, 6\}) \cap A$.

(iii) Να βρείτε ένα αριστερό αντίστροφο για την f .

Άσκηση 8. Να λύσετε στο $\mathbb{Z}_n$ τις παρακάτω εξισώσεις:

(i) $x^2 = 1, n = 4$.

(ii) $x^4 = 1, n = 5$.

(iii) $x^2 + 3x + 2 = 0, n = 6$.

Άσκηση 9. Σήμερα είναι Τετάρτη. Τι μέρα θα είναι σε 4^{6529} μέρες;

2 Προτασιακή λογική-επαγωγή-στοιχειώδους θεωρία αριθμών

Άσκηση 10. Να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα και να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή ψευδείς:

(i) Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει πραγματικός αριθμός y ώστε $x = y^3$.

(ii) Υπάρχει πραγματικός αριθμός y ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x το άθροισμά τους είναι θετικός αριθμός.

(iii) Για κάθε άρρητο αριθμό x υπάρχει φυσικός n ώστε $x < n < x + 1$.

Άσκηση 11. Να αποδείξετε με απαγωγή σε άτοπο ότι:

- (i) Το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου είναι άρρητος.
- (ii) Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.
- (iii) Αν $y < x + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $y \leq x$.

Άσκηση 12. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in X$. Να δείξετε με απαγωγή σε άτοπο ότι: αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο X ώστε $x_n \rightarrow \xi \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(\xi)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ .

Άσκηση 13. Σε μία επιχείρηση τρεις υπάλληλοι είναι ύποπτοι για υπεξαίρεση χρημάτων απ' το ταμείο. Τρεις ύποπτοι έδωσαν τις εξής καταθέσεις:

- **A:** “ο B και ο Γ είναι ένοχοι.”
- **B:** “αν ο Γ είναι ένοχος, τότε ο A είναι αθώος.”
- **Γ:** “είμαι αθώος και ο B και ο Γ είναι ένοχοι.”

Θεωρούμε τις εξής λογικές προτάσεις:

- **p:** “ο A είναι αθώος.”
- **q:** “ο B είναι αθώος.”
- **r:** “ο Γ είναι αθώος.”

- (1) Γραψτε τις τρεις καταθέσεις σε μορφή προτάσεων λογικής.
- (2) Αν και οι τρεις καταθέσεις είναι ψευδής, ποιος/οι είναι αθώος/οι και ποιος/οι είναι ένοχος/οι;
- (3) Μπορεί και οι τρεις καταθέσεις να είναι αληθείς;
- (4) Αν ο αθώος λέει ψέματα και ο ένοχος λέει αλήθεια, τότε ποιος είναι αθώος και ποιος είναι ένοχος;

Άσκηση 14. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a + b > 0$. Να δείξετε ότι

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 15. (Ανισότητα Jensen) Έστω διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Η f λέγεται κυρτή αν για κάθε $x, y \in I$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει ότι

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Να δείξετε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in I$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1)$ ώστε $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ισχύει ότι

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Άσκηση 16. Δίνονται ακέραιοι a, b, m, n με $m, n \geq 1$.

(i) Αν $a \equiv b \pmod{m}$, δείξτε ότι $\gcd(a, b) = \gcd(b, m)$.

(ii) Έστω ότι $a \geq 2$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα δείξτε ότι

$$\gcd\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \gcd(n, a - 1).$$

3 Συνδυαστική-πληθάριθμοι συνόλων

Άσκηση 17. Να δείξετε ότι $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Άσκηση 18. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την ευκλείδια νόρμα $\|\cdot\|_2$ και το σύνολο των ανοικτών μπαλών

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) : x, r \in \mathbb{Q}\}.$$

Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 19. Να δείξετε θεωρώντας κατάλληλη συνάρτηση ότι $|(0, +\infty)| = |\mathbb{R}|$.

Άσκηση 20. Έστω $\varepsilon > 0$ και σύνολο $A = \{x_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$|x_i - x_j| \geq \varepsilon \text{ για κάθε } i \neq j.$$

Να δείξετε ότι $|I| \leq |\mathbb{Q}|$.

Άσκηση 21. (i) Πόσοι ακέραιοι από τους $1, 2, \dots, 3000$ δεν διαιρούνται με κανέναν από τους $2, 3$ και 5 ?

(ii) Πόσα από τα 5-υποσύνολα του συνόλου $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ δεν περιέχουν κανένα από τα σύνολα $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ και $\{5, 6\}$?

- Άσκηση 22.** (i) Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, αν θέλουμε όλα τα ψηφία να είναι διαφορετικά·
- (ii) Πόσους πενταψήφιους περιττούς αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, αν θέλουμε όλα τα ψηφία να είναι διαφορετικά·
- (iii) Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μικρότερους του 30000 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, αν θέλουμε όλα τα ψηφία να είναι διαφορετικά·