και επειδή $h_P(\theta) = \|\theta\|_0$, $h_{P^\circ}(\theta) = \|\theta\|_P$ αλλά επειδή $\|u\|_K \|u\|_{K^\circ} \geq |\langle u,u\rangle| = 1$

έχουμε $\left(\int_{S^{n-1}} \sqrt{\underbrace{h_P(\theta) h_{P^\circ}(\theta)}_{\geq \|\theta\| = 1}} \, d\sigma(\theta) \right)^2 \geq 1$

13/05/2025

Αριθμοί κάλυψης

Ορισμός

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ δύο κυρτά σύνολα. Ορίζω

$$N(A,B) = \min\{N : \exists x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n,\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + B)\}$$

$$\overline{N}(A,B) = \min\{N : \exists x_1, \dots, x_N \in A,\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + B)\}$$

Πρόταση

Έστω $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτά σύνολα με $A \subseteq B$. Τότε $N(A,C) \leq N(B,C)$
$N(C,B) \leq N(C,A)$, $\overline{N}(C,B) \leq \overline{N}(C,A)$

Πρόταση:

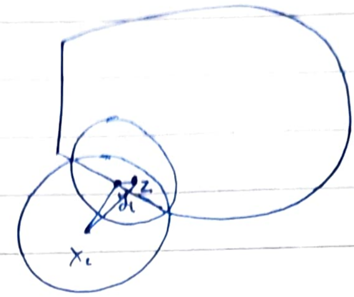
Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτά σύνολα, τότε $\overline{N}(A, B-B) \leq N(A,B) \leq \overline{N}(A,B)$
Μάλιστα αν $B = RB_2^n$ τότε $N(A, RB_2^n) = \overline{N}(A, RB_2^n)$

Απόδειξη

Η $N(A,B) \leq \overline{N}(A,B)$ είναι προφανής
Έστω $N(A,B) = N$, δηλ. $\exists x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + B)$
Για κάθε i, πρέπει $(x_i + B) \cap A \neq \emptyset$ (αλλιώς το N δεν είναι ελάχιστο)
Άρα ~~[illegible]~~ $\forall b_i \in B$ $\exists z_i \in A$ $x_i + b_i = z_i \Rightarrow x_i = z_i - b_i$
$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (z_i - b_i + B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (z_i - B + B)$ με $z_i \in A$

Άρα $\overline{N}(A, B-B) \leq N(A,B)$

Για την μπάλα $B = RB_2^n$
Θδο $(x_i + B)\cap A \subseteq (y_i + B)$
για y_i το σημείο ελάχιστης απόστασης του x_i από το A



Για $z \in (x_i+B)\cap A$ έχουμε ότι

$$R^2 \geq \|x_i - z\|_2^2 = \|x_i - y_i + y_i - z\|_2^2 = \|x_i-y_i\|_2^2 + \|y_i - z\|_2^2 + 2\underbrace{\langle x_i - y_i, y_i - z\rangle}_{\geq 0}$$
$$\geq \|y_i - z\|_2^2$$

επειδή το y_i είναι το πλησιέστερο (από προηγούμενο λήμμα)

$\Rightarrow \|y_i - z\|_2^2 \leq R^2 \Rightarrow z \in y_i + B$

Πρόταση

Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτά σώματα και T αντιστρέψιμος γραμμικός $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $N(A,B) = N(T(A), T(B))$

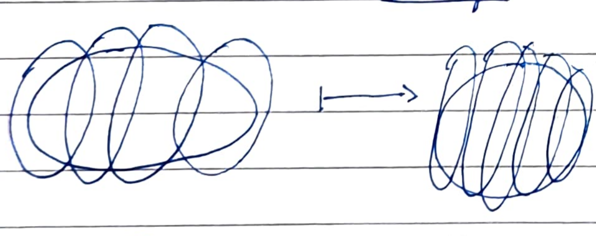
Απόδειξη

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i+B) \Rightarrow T(A) \subseteq T\left(\bigcup_{i=1}^N (x_i+B)\right) = \bigcup_{i=1}^N (Tx_i + T(B))$

Πόρισμα:

Αν E_1, E_2 ελλειψοειδή, τότε $N(E_1,E_2) = N(E_2^\circ, E_1^\circ)$

Απόδειξη



Θέλω T αντιστρέψιμο ώστε $T(E_1) = E_2^\circ$
και μάλιστα $T = T^*$ $\qquad E_1 \longrightarrow B_2^n \longrightarrow E_2^\circ$ ← ελλειψοειδή
Άρα:
Τότε $T(E_2) = T((T(E_1))^\circ) = T(T^{-*}(E_1^\circ)) = E_1^\circ$
διότι $(T(K))^\circ = T^{-*}(K^\circ)$

Πρόταση

$N(A,B) \leq N(A,C)N(C,B)$

Απόδειξη

Έστω ότι $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + C)$, $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{M}(y_i + B)$

τότε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{j=1}^{M}(x_i + y_j + B)$ άρα $N(A,B) \leq N(A,C)N(C,B)$

Πρόταση

Έστω $K, T \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτά σώματα. Τότε $\frac{|K|}{|T|} \leq N(K,T)$

και αν T συμμετρικό $N(K,T) \leq 2^n \frac{|K + \frac{T}{2}|}{|T|}$

Απόδειξη

$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + T) \Rightarrow |K| \leq |\bigcup_{i=1}^{N} x_i + T| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i + T| = \sum_{i=1}^{N} |T| = N|T|$

$\Rightarrow \frac{|K|}{|T|} \leq N$

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_M \in K$ (με M μέγιστο) ώστε $(x_i + \frac{T}{2}) \cap (x_j + \frac{T}{2}) = \emptyset$

$\hookrightarrow \nexists z = x_i + \frac{t_1}{2}, z = x_j + \frac{t_2}{2}$

$x_i - x_j = \frac{t_1 - t_2}{2} \in T$

άρα $x_i - x_j \notin T$

Ισχυρισμός $N(K,T) \leq M$

άρα δεν υπάρχει $x \in K$, ώστε $x \notin \bigcup_{i=1}^{M}(x_i + T)$ και τότε $(x + \frac{T}{2}) \cap (x_i + \frac{T}{2}) = \emptyset$

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{M}(x_i + T)$ άρα $N(K,T) \leq \bar{N}(K,T) \leq M$

Επίσης $|K + \frac{T}{2}| \geq |\bigcup_{i=1}^{M}(x_i + \frac{T}{2})| = \sum_{i=1}^{M} |x_i + \frac{T}{2}| = M|\frac{T}{2}| \geq N(K,T)\frac{|T|}{2}$

και προκύπτει το ζητούμενο

Σχόλιο

Για $T=\lambda K$, $0<\lambda<1$ τότε $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \le N(K,\lambda K) \le \left(1+\frac{2}{\lambda}\right)^n$

Εικασία Hadwiger $\forall K \ \exists \lambda \ \ N(K,\lambda K) \le 2^n$

15/05/2025

Ανισότητα Rogers–Shepard

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα. Τότε $|K-K| \le \binom{2n}{n}|K|$

(Η ανισότητα είναι βέλτιστη για το simplex)

Απόδειξη

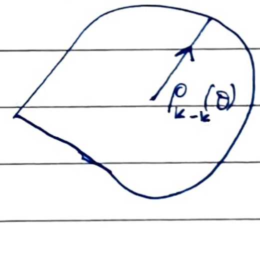
$$|K-K| = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K-K}(x)\,dx$$

Υπενθύμιση: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty\!\!\int_{S^{n-1}} f(r\theta)\, r^{n-1}\,dr\,d\theta = n\omega_n \int_0^\infty\!\!\int_{S^{n-1}} f(r\theta)\, r^{n-1}\,dr\,d\sigma(\theta)$

Άρα $\displaystyle |K-K| = n\omega_n \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty \mathbb{1}_{K-K}(r\theta)\, r^{n-1}\,dr\,d\sigma(\theta)$

$$= n\omega_n \int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_{K-K}(\theta)} r^{n-1}\,dr\,d\sigma(\theta)$$

$$= \omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_{K-K}^n(\theta)\,d\sigma(\theta)$$



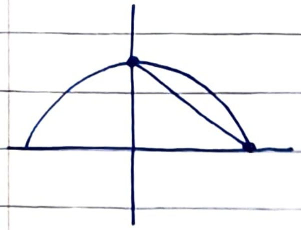
$r\theta \in K-K \iff r \le \rho_{K-K}(\theta)$

$|K|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(x) * \mathbb{1}_{-K}(x)\,dx$ για $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(y)\,\mathbb{1}_{x+K}(y)\,dy\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} |K\cap(x+K)|\,dx \left[= \int_{K-K} |K\cap(x+K)|\,dx\right]$$

Έστω $f(x) = |K\cap(x+K)|$, $x \in K-K$

Από Brunn–Minkowski η $f^{\frac{1}{n}}$ είναι κοίλη



θεωρούμε $g(x) = g(r\theta) = f(0)^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{r}{\rho_{K-K}(\theta)}\right)$
σε $[0, \rho_{K-K}(\theta)\theta]$

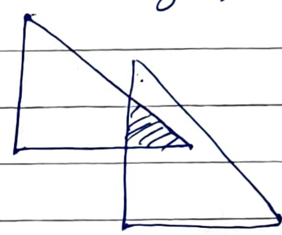
$$\int_{K-K} \left(f(x)^{\frac{1}{n}}\right)^n dx \overset{\text{κοίλη}}{\geq} \int_{K-K} g(x)^n dx = n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{K-K}(\theta)} f(0)\Big(1 - \underbrace{\boxed{\frac{r}{\rho_{K-K}(\theta)}}}_{=t}\Big)^n r^{n-1}\, dr\, d\sigma(\theta)$$

$$= n\omega_n f(0) \int_{S^{n-1}} \rho^n_{K-K}(\theta)\, d\sigma(\theta) \underbrace{\int_0^1 (1-t)^n t^{n-1}\, dt}_{B\text{-συνάρτηση}} = n|K||K-K| \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}$$

$$\Rightarrow |K-K| \leq \binom{2n}{n}|K|$$

Παρατήρηση

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K έχει την ακόλ. ιδιότητα
Αν $(rK+s)\cap(qK+t) \neq \emptyset$ τότε $(rK+s)\cap(qK+t) = wK+y$ για κάποια w, y
και αυτό ισχύει μόνο για τα simplex



Υπενθύμιση:

Αν $K, T \subseteq \mathbb{R}^n$ και T συμμετρικό $N(K,T) \leq \frac{|2K+T|}{|T|}$

Αν T όχι αναγ. συμ. τότε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+T) \Rightarrow K-T \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+T-T)$

$$\Rightarrow |K-T| \leq N(K,T)|T-T| \leq N(K,T)4^n|T|$$

και $T\cap(-T) \subseteq T \subseteq T-T$

Για πάνω φράγμα, $N(K,T) \leq N(K, T\cap(-T)) \leq \frac{|2K+T\cap(-T)|}{|T\cap(-T)|}$

$$\leq \frac{|2K-2T|}{|T\cap(-T)|} = \frac{2^n|K-T|}{|T\cap(-T)|}$$

Μπορούμε να δείξουμε $|T\cap(-T)|\geq 2^{-n}|T|$

οπότε $\quad N(K,T)\leq 4^n\dfrac{|K-T|}{|T|}$

$\overline{N}(B_2^n,tK)$

Έστω $x_1,\dots,x_N$ μεγιστικό υποσύνολο της B_2^n ώστε $x_i+\frac{t}{2}K$ να είναι ξένα

Επομένως $\forall\lambda$ τα σύνολα $\lambda x_i+\frac{\lambda t}{2}K$ είναι ξένα και

$$1\geq\gamma_n\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(\lambda x_i+\frac{\lambda t}{2}K\right)\right)=\sum_{i=1}^{N}\gamma_n\left(\lambda x_i+\frac{\lambda t}{2}K\right)\geq\sum_{i=1}^{N}e^{-\frac{\|\lambda x_i\|_2^2}{2}}\gamma_n\left(\frac{\lambda t}{2}K\right)$$

Από άσκηση $\gamma_n(K+z)=e^{-\frac{\|z\|_2^2}{2}}\gamma_n(K)$ $\qquad\geq N e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\gamma_n\left(\frac{\lambda t}{2}K\right)$

Άρα $\quad N(B_2^n,tK)\leq N\leq\dfrac{e^{\frac{\lambda^2}{2}}}{\gamma_n\left(\frac{\lambda t}{2}K\right)}$

$$\gamma_n\left(\frac{\lambda t}{2}K\right)=\gamma_n\left(y:\|y\|_K\leq\frac{\lambda t}{2}\right)=1-\gamma_n\left(y:\|y\|_K\geq\frac{\lambda t}{2}\right)$$

Από Markov $\quad\gamma_n\left(y:\|y\|_K\geq\frac{\lambda t}{2}\right)\leq\dfrac{2}{\lambda t}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K\,d\gamma_n(x)$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K\,d\gamma_n(x)=\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty\|r\theta\|_K e^{-\frac{\|r\theta\|_2^2}{2}}r^{n-1}\,dr\,d\sigma(\theta)\cdot\frac{n\omega_n}{(2\pi)^{n/2}}$$

$$=\frac{n}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\underbrace{\int_0^\infty r^n e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr}_{\Gamma\text{ ολοκλήρωμα}}\int_{S^{n-1}}\underbrace{\|\theta\|_K}_{=h_{K^\circ}(\theta)}d\sigma(\theta)=\frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}w(K^\circ)\leq c\sqrt{n}\,w(K^\circ)$$

Άρα $\gamma_n\left(y:\|y\|_K\geq\frac{\lambda t}{2}\right)\leq\dfrac{2c\sqrt{n}\,w(K^\circ)}{\lambda t}$

$\Rightarrow\gamma_n\left(\frac{\lambda t}{2}K\right)\geq 1-\dfrac{2c\sqrt{n}\,w(K^\circ)}{\lambda t}$

$$N(B_2^n, tK) \leq N \leq \frac{e^{\frac{\lambda^2}{2}}}{\gamma_n\left(\frac{\lambda}{2} tK\right)} \leq \frac{e^{\frac{\lambda^2}{2}}}{1 - \frac{2c\sqrt{n}}{\lambda t} w(K^\circ)}$$ Διαλέγω $\lambda = \frac{4c\sqrt{n}\, w(K^\circ)}{t}$

<u>Ανισότητα Sudakov</u>: $\log N(K, tB_2^n) \leq cn \left(\frac{w(K)}{t}\right)^2$