

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 11

Παραδώστε τις ασκήσεις: 11.1, 11.2

Άσκηση 11.1 Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- (i) $\mathbb{Q}^3$, (ii) $\mathbb{C}$, (iii) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ είναι πρώτος}\}$, (iv) $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$,
(v) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 10^{-10000}\}$, (vi) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2^a 3^b, \text{ για κάποια } a, b \in \mathbb{N}\}$.

Άσκηση 11.2

- (i) Αποδείξτε ότι κάθε σύνολο ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με ρητά άκρα είναι αριθμήσιμο.
(ii) Αποδείξτε ότι κάθε σύνολο διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με ρητά άκρα είναι αριθμήσιμο.
(iii) Αποδείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο.

Προσέξτε ότι η άσκηση ζητάει να μετρήσετε το πλήθος των διαστημάτων και όχι το πλήθος των στοιχείων των διαστημάτων.

Άσκηση 11.3 Θεωρήστε το σύνολο S των σφαιρών στον χώρο $\mathbb{R}^3$ των οποίων τα κέντρα έχουν ρητές συντεταγμένες και των οποίων η ακτίνα είναι ρητός αριθμός. Δείξτε ότι το σύνολο S είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 11.4

- (i) Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε με το ελληνικό αλφάβητο αριθμήσιμο σύνολο; (Οι λέξεις δεν είναι κατ' ανάγκη υπαρκτές.)
(ii) Είναι το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούμε να φτιάξουμε από ένα αριθμήσιμο-άπειρο αλφάβητο (π.χ. $\mathbb{N}$) αριθμήσιμο σύνολο; Θεωρούμε ότι μία λέξη έχει πεπερασμένο πλήθος γραμμάτων.

Άσκηση 11.5 Έστω σύνολο A . Συμβολίζουμε με $\{0, 1\}^A$ το σύνολο των συναρτήσεων $\{f : A \rightarrow \{0, 1\}\}$. Για κάθε υποσύνολο $U \subseteq A$ ορίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του U

$$\chi_U(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } t \notin U \\ 1 & , \text{ αν } t \in U \end{cases}$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : \mathfrak{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$, $F(U) = \chi_U$ είναι αμφιμονοσήμαντη.