Λήμμα (Auerbach)

Έστω X χώρος με νόρμα, διάστασης n. Μπορώ να βρω $x_1,\dots,x_n \in X$ και $x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*$ ώστε $\|x_i\| = \|x_i^*\| = 1$ και $x_i^*(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

06/05/2025

Λήμμα (Auerbach)

Έστω X χώρος με νόρμα διάστασης n. Μπορώ να βρω $x_1,\dots,x_n \in X$ και $x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*$ ώστε $\|x_i\| = \|x_i^*\| = 1$ και $x_i^*(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Απόδειξη

Έστω $e_1, e_2, \dots, e_n$ μια βάση του X και τότε κάθε $y \in X$ γράφεται $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

Για κάθε επιλογή n διανυσμάτων $z_1,\dots,z_n \in X$ γράφεται $z_k = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} e_i$

Τα $z_1,\dots,z_n$ είναι γρ. ανεξ. αν $|\det(z_{ik})_{i,k=1}^{n}| > 0$

$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$

και έστω $f : X \times \dots \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(z_1,\dots,z_n) = |\det(z_{ik})_{i,k=1}^{n}|$

Η f είναι συνεχής (γιατί η $\|\cdot\|$ συνεχής) και η S_X συμπαγές σύνολο γιατί ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα ο περιορισμός της f στο S_X παίρνει μέγιστη τιμή και έστω στο $(x_1,\dots,x_n)$

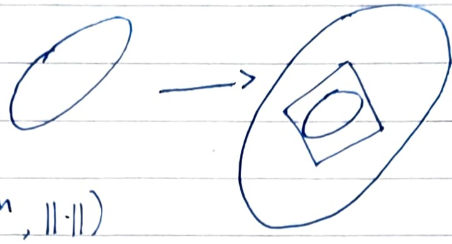
Ορίζουμε $x_i^* : X \to \mathbb{R}$ με $x_i^*(x) = \dfrac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n)}{f(x_1,\dots,x_n)}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ισχύει ότι } |x_i^*(x)| \leq 1 \ \forall x \in S_X \text{ οπότε } \|x_i^*\| \leq 1 \\ \text{Αλλά } x_i^*(x_i) = 1 \text{, άρα } \|x_i^*\| \geq x_i^*(x_i) = 1 \end{array}\right\} \|x_i^*\| = 1$$

Θεώρημα

Για κάθε n-διάστατο χώρο X με νόρμα, $\exists T$ γραμμικός ώστε $\forall x \in \ell_1^n$

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \le \|Tx\| \le \|x\|_1$$



Απόδειξη

Μπορώ να υποθέσω ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

Από το λήμμα Auerbach βρίσκω $x_1, \dots, x_n \in X$ και $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ ώστε $\|x_i\| = 1 = \|x_i^*\|$ και $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ (Παρατηρούμε ότι τα $x_1, \dots, x_n$ είναι βάση του X)

Για κάθε $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^n t_i x_i\Big\| \le \sum_{i=1}^n \|t_i x_i\| = \sum_{i=1}^n |t_i|\,\|x_i\| = \sum_{i=1}^n |t_i| \qquad \Big(\|x\| = \sup_{x^* \in S_{X^*}} |x^*(x)|\Big)$$

Hahn-Banach

Άρα $\Big\|\sum_{i=1}^n t_i x_i\Big\| \ge \Big|x_j^*\Big(\sum_{i=1}^n t_i x_i\Big)\Big| = |t_j|.\ \forall j$

Επομένως αν προσθέσω για κάθε j $\quad n\Big\|\sum_{i=1}^n t_i x_i\Big\| \ge \sum_{i=1}^n |t_i|$

Τέλος, ορίζω $T: \ell_1^n \longrightarrow X$ με $T(e_i) = x_i$ για κάθε i

($e_1, \dots, e_n$ είναι η κανονική βάση του ℓ_1^n)

Έστω $x \in \ell_1^n$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, άρα

$$T(y) = \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

Από τις ανισότητες που έδειξα $\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|}_{\|y\|_{\ell_1^n}} \le \|T(y)\| \le \sum_{i=1}^n |y_i| = \|y\|_{\ell_1^n}$

($\Longrightarrow \|T\| \le 1$ και $\|T^{-1}\| \le n$)

~~Ορίζουμε~~ συμμετρικό

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμμετρικό κυρτό σώμα. Ορίζουμε $\mathrm{vrad}(K) = \left(\frac{|K|}{|\mathcal{E}|}\right)^{\frac{1}{n}}$ όπου $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου στο K

Στη συμμετρική περίπτωση $\mathcal{E} \subseteq K \subseteq \sqrt{n}\,\mathcal{E}$ έτσι $1 \le \left(\frac{|K|}{|\mathcal{E}|}\right)^{\frac{1}{n}} \le \sqrt{n}$

Πως μπορώ να φράξω το $\mathrm{vrad}(K)$ από πάνω;

Αφού το vrad είναι αναλλοίωτο ως προς γραμμικούς μετασχηματισμούς αρκεί να κοιτάξω την $T(K)$ όπου το $T(K)$ είναι σε θέση John, δηλ. η B_2^n είναι το ελλ. μέγιστου όγκου στο $T(K) = \tilde{K}$

Από το θεώρημα του John υπάρχουν $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1} \cap \partial\tilde{K}$ σημεία επαφής του $\tilde{K}$ με την B_2^n ώστε $I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i u_i^T$

Όπως είχαμε δει $\tilde{K} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_i \rangle| \le 1 \ \forall 1 \le i \le n\} = L$

$$|\tilde{K}| \le |L| = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_L(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{\{x : |\langle x,u_i\rangle| \le 1\}}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{[-1,1]}(\langle x, u_i\rangle)\,dx$$

Ανισότητα Brascamp-Lieb

Έστω $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_i > 0$ ώστε $I_n = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i u_i^T$

Για κάθε $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \left(f_i(\langle x, u_i\rangle)\right)^{c_i} dx \le \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_i\right)^{c_i}$$

Οπότε $$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{[-1,1]}(\langle x, u_i\rangle)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{1}^{c_i}_{[-1,1]}(\langle x, u_i\rangle)\,dx \le \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{-1}^{1} 1\,dx\right)^{c_i} = 2^{c_1 + \dots + c_n}$$

Όμως $c_1 + \dots + c_n = n$ άρα $= 2^n$

Αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα

$$S(K) \geq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leftarrow \text{ισοπεριμετρική}$$

Η αντίστροφη ισοπεριμετρική δεν έχει γενικά νόημα, αλλά μπορώ να κάνω το εξής εγχείρημα: Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα. Τότε $\exists T$ γραμμικός ώστε $|\tilde{K}| = |B_\infty^n|$ και $|S(\tilde{K})| \leq |S(B_\infty^n)|$

$\tilde{K} = T(K)$

Από όλα τα σώματα στη θέση John και σημαία τον κύβο έχω την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα, και ο κύβος έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια

08/05/2025

Αντίστροφη ισοπεριμετρική

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$, κυρτό, συμμετρικό σώμα. Τότε υπάρχει T γραμμικός μετασχηματισμός ώστε για το $T(K) = \tilde{K}$, $|\tilde{K}| = |B_\infty^n|$ και $S(\tilde{K}) \leq S(B_\infty^n)$

Απόδειξη

Επιλέγουμε τον T ώστε η λB_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου στο $\tilde{K}$ και $|\tilde{K}| = |B_\infty^n|$

$$S(\tilde{K}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|\tilde{K} + \varepsilon B_2^n| - |\tilde{K}|}{\varepsilon} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{|\tilde{K} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\tilde{K}| - |\tilde{K}|}{\varepsilon} = \frac{n}{\lambda}|\tilde{K}| \quad (*)$$

επειδή $\lambda B_2^n \subseteq \tilde{K} \Rightarrow B_2^n \subseteq \frac{1}{\lambda}\tilde{K}$

Την προηγούμενη φορά δείξαμε ότι $vrad(K) = \left(\frac{|K|}{|E|}\right)^{\frac{1}{n}}$ είχαμε αποδείξει ότι μεγιστοποιείται για τον κύβο

Επομένως $\left(\frac{|\tilde{K}|}{|\lambda B_2^n|}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{|B_\infty^n|}{|B_2^n|}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}|\tilde{K}|^{\frac{1}{n}} \leq |B_\infty^n|^{\frac{1}{n}}$

Όμως $|\tilde{K}| = |B_\infty^n|$ άρα $\lambda \geq 1$

Από (*) $S(\tilde{K}) \le \frac{n}{2}|\tilde{K}| \le n|B_\infty^n|$

και $S(B_\infty^n) = 2n\cdot 2^{n-1}$ άρα $S(\tilde{K}) \le S(B_\infty^n)$

<u>Θεώρημα</u> (Figiel - Lindenstrauss - Milman)
Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$, ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$ και για κάθε συμμετρικό πολύτοπο $P\subseteq\mathbb{R}^n$ ισχύει $\log(\underset{\text{κορυφές}}{\#V})\log(\underset{(n-1)\text{ διάστατες έδρες}}{\#F}) \ge c\cdot n$ (*)

[Θα δείξουμε γενικά ότι η (*) ισχύει $\forall P$ ώστε $B_2^n\subseteq P\subseteq\sqrt{n}B_2^n$]

<u>Απόδειξη</u>

<u>Βήμα 1</u>
Εφαρμόζω έναν γραμμικό μετασχηματισμό T: $B_2^n\subseteq T(P)\subseteq\sqrt{n}B_2^n$ (Θεωρ. John)
Το $T(P)$ έχει το ίδιο πλήθος κορυφών και εδρών

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:
Έστω σ το μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Για κάθε $u\in S^{n-1}$ και $\forall\varepsilon\in(0,1)$ $\sigma(\theta\in S^{n-1}: \langle u,\theta\rangle < \varepsilon) \ge 1-e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}}$ (†)

<u>Λήμμα</u>
Έστω $P\subseteq RB_2^n$ και $\log(\#V) < \frac{n}{4}$. Τότε $M^*(P) := \int_{S^{n-1}} h_P(\theta)\,d\sigma(\theta)$
$M^*(P) \le CR\sqrt{\frac{\log(\#V)}{n}}$ (C απολ. σταθερά)

<u>Απόδειξη</u>

$h_P(\theta) = \max_{u\in V}|\langle\theta,u\rangle|$ και $\theta\in S^{n-1}$

$M^*(P) = \int_{S^{n-1}} h_P(\theta)\,d\sigma(\theta)$ Υπενθύμιση: $\int f(x)\,d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(x: f(x)>t)\,dt$

$$\Rightarrow M^*(P) = \int_0^\infty \sigma(\theta: h_P(\theta)>t)\,dt = \int_0^\infty \sigma(\theta: \max_{u\in V}|\langle\theta,u\rangle| > t)\,dt$$

$$= \int_0^s \underbrace{\sigma(\theta: \max_{u\in V}|\langle u,\theta\rangle| > t)}_{\le 1}\,dt + \int_s^\infty \sigma(\theta: \max_{u\in V}|\langle u,\theta\rangle| > t)\,dt$$

$$\le s + \int_s^\infty \sigma\Big(\theta: \max_{u\in V}\Big|\Big\langle \overset{\in S^{n-1}}{\frac{u}{\|u\|_2}},\theta\Big\rangle\Big| > \frac{t}{\|u\|_2}\Big)\,dt$$

$$\le \delta + \int_{\delta}^{\infty} \sigma\left(\theta : \max_{u\in V} \left|\left\langle \frac{u}{\|u\|_2}, \theta\right\rangle\right| > \frac{t}{R}\right) dt$$

επειδή $P \subseteq RB_2^n \Rightarrow h_P \le h_{RB_2^n}$ και $h_{RB_2^n}(u) = R\|u\|_2$

όμως $\sigma\left(\theta : \max_{u\in V} \left|\left\langle \frac{u}{\|u\|_2}, \theta\right\rangle\right| > \frac{t}{R}\right) = \sigma\left(\bigcup_{u\in V}\left\{\theta : \left|\left\langle \frac{u}{\|u\|_2}, \theta\right\rangle\right| > \frac{t}{R}\right\}\right)$

$$\le \sum_{u\in V} \sigma\left(\theta : \left|\left\langle \frac{u}{\|u\|_2}, \theta\right\rangle\right| > \frac{t}{R}\right)$$

$$\overset{(+)}{\le} \sum_{u\in V} e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{t}{R}\right)^2}$$

Αρα τελικά $M^*(P) \le \delta + \int_{\delta}^{\infty} \sum_{u\in V} e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{t}{R}\right)^2} dt \Rightarrow$

$M^*(P) \le \delta + R\#V e^{-\frac{1}{2}n\left(\frac{\delta}{R}\right)^2}$

Διαλέγω $\delta = R\sqrt{\frac{4\log\#V}{n}}$.

Μετά τις πράξεις $M^*(P) \le CR\sqrt{\frac{4\log\#V}{n}}$

<u>Απόδειξη θεωρήματος</u>

Εφαρμόζω το Λήμμα για το πολικό επειδή #έδρες πολικού = #κορυφές πολύτοπου

$\int_{S^{n-1}} h_{P^\circ}(\theta)\,d\sigma(\theta) \le C\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\log\#F}{n}}$ όπου $rB_2^n \subseteq P \subseteq RB_2^n$

$\Rightarrow P^\circ \subseteq \frac{1}{r}B_2^n$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη

$$\sqrt{\frac{\log\#V}{n}}\sqrt{\frac{\log\#F}{n}}\,\underset{\sqrt{n}}{\underset{\shortparallel}{\frac{R}{r}}} \ge \int_{S^{n-1}} h_P(\theta)\,d\sigma(\theta)\int_{S^{n-1}} h_{P^\circ}(\theta)\,d\sigma(\theta)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log\#V}\,\sqrt{\log\#F} \ge \sqrt{n}\int_{S^{n-1}} h_P(\theta)\,d\sigma(\theta)\int_{S^{n-1}} h_{P^\circ}(\theta)\,d\sigma(\theta) \overset{C-S}{\ge} \left(\int_{S^{n-1}} \sqrt{h_P(\theta)h_{P^\circ}(\theta)}\,d\sigma(\theta)\right)^2$$

και επειδή $h_P(\theta) = \|\theta\|_\circ$, $h_{P^\circ}(\theta) = \|\theta\|_P$ και επειδή $\|u\|_K \|u\|_{K^\circ} \geq |\langle u, u\rangle| = 1$

έχουμε $\left(\int_{S^{n-1}} \underbrace{\sqrt{h_P(\theta) h_{P^\circ}(\theta)}}_{\geq \|\theta\| = 1} \, d\sigma(\theta) \right)^2 \geq 1$