

Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1 Να υπολογίσετε την συνάρτηση στήριξης για τις μπάλες B_p^n , με $p \geq 1$, καθώς και τα πολικά σώματά τους.

Άσκηση 2 Να υπολογίσετε το πλήθος των k -διάστατων εδρών της B_1^n .

Άσκηση 3 Αν τα K, L είναι κυρτά και συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, να αποδείξετε ότι $K = L$ αν και μόνο αν $h_K = h_L$.

Άσκηση 4 Έστω

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_3| \leq 1\}.$$

Να αποδείξετε ότι το D είναι κυρτό και να περιγράψετε τα ακραία σημεία του.

Άσκηση 5 Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Να αποδείξετε ότι $K = K^\circ$ αν και μόνο αν $K = B_2^n$.

Άσκηση 6 Έστω K ένα κυρτό σώμα στο $\mathbb{R}^n$. Το κέντρο βάρους του K είναι το σημείο $y = (y_1, \dots, y_n)$ με συντεταγμένες

$$y_i = \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_i \rangle dx, \quad i = 1, \dots, n,$$

Να αποδείξετε ότι $y \in K$.

Άσκηση 7 Έστω $C \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό, κλειστό, κυρτό υπόσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $\text{ext}(C) \neq \emptyset$, αν και μόνο αν το C δεν περιέχει καμιά ευθεία.

Άσκηση 8 Αν $B_2^n \subseteq K$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου στο συμμετρικό κυρτό σώμα K , να αποδείξετε ότι $K \subseteq \sqrt{n} B_2^n$.

Άσκηση 9 Δίνονται $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ όχι αναγκαστικά διακεκριμένα, ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m x_j \otimes x_j.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^m \|x_j\|_2^2 = n.$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \dots, a_m$,

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^m a_j^2 \right)^{1/2}.$$