

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 10

Παραδώστε τις ασκήσεις: 10.2, 10.5

Άσκηση 10.1 Δίνεται το σύνολο των σημείων $L = \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ του επιπέδου. Ένα μονοπάτι από το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο (n, m) , είναι μία ακολουθία σημείων του L τέτοια ώστε δύο διαδοχικά σημεία της ακολουθίας διαφέρουν σε μία ακριβώς συντεταγμένη κατά ακριβώς 1. Με άλλα λόγια, σε κάθε βήμα μπορούμε να κινηθούμε προς το σημείο που βρίσκεται “πάνω”, “κάτω”, “δεξιά” ή “αριστερά” μας. Θα ονομάζουμε το μονοπάτι μονότονο, αν επιτρέπεται να κινούμαστε μόνο “δεξιά” ή “πάνω”. Πόσα διαφορετικά μονότονα μονοπάτια υπάρχουν, από το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο (n, m) ; Μπορείτε να γενικεύσετε το ερώτημα (και την απάντηση) σε τρεις ή περισσότερες διαστάσεις;

Άσκηση 10.2 Θέλουμε να μοιράσουμε 10 πορτοκάλια και 8 μήλα σε 4 διακεκριμένα παιδιά. Τα πορτοκάλια θεωρούνται όμοια μεταξύ τους, ομοιώς και τα μήλα.

- (i) Με πόσους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό;
- (ii) Με πόσους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό αν κάθε παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα πορτοκάλι;

Άσκηση 10.3

- (i) Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ;
- (ii) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς αρχίζουν από Π;
- (iii) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς περιέχουν τα γράμματα ΗΛ διαδοχικά;
- (iv) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς περιέχουν τα γράμματα Η,Λ σε διπλανεθ θέσεις;
- (v) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς αρχίζουν από Π και περιέχουν τα γράμματα ΗΛ διαδοχικά;
- (vi) Πόσοι αναγραμματισμοί από αυτούς αρχίζουν από Π ή περιέχουν τα γράμματα ΗΛ διαδοχικά;

Άσκηση 10.4 Έστω σύνολα A και B . Δείξτε ότι υπάρχει ένα-προς-ένα συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ αν και μόνο αν υπάρχει επί συνάρτηση $g : B \rightarrow A$.

Άσκηση 10.5 Έστω άπειρο σύνολο A , $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του.

- (i) Δείξτε ότι υπάρχει (άπειρη) ακολουθία $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ στοιχείων του A .
- (ii) Ορίστε μία ένα-προς-ένα και επί αντιστοίχιση $g : \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$.
- (iii) Ορίστε μία ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : A \rightarrow A \setminus X$.

(iv) Συμπεράνετε ότι $|A| = |A \setminus X|$.

Άσκηση 10.6

(i) Δείξτε ότι $|(0, 1)| = |(a, b)|$ για οποιαδήποτε $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(ii) Δείξτε ότι $|(0, 1)| = |[a, b]|$ για οποιαδήποτε $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(iii) Δείξτε ότι $|(-1, 1)| = |\mathbb{R}|$.

(iv) Δείξτε ότι $|[0, 1]| = |\mathbb{R}|$.

(v) Δείξτε ότι $|(-1, 0) \cup (0, 1)| = |\mathbb{R}|$.