29/04/2025

<u>Θεώρημα</u> (John) Χαρακτηρισμός του πότε η B_2^n είναι ελλειψοειδής μέγιστου όγκου στο K

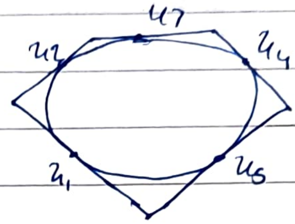
~~Χαρ~~ Συμμετρική περίπτωση ($K=-K$):

Η B_2^n είναι ελλειψοειδής μέγιστου όγκου στο K <u>αν</u> $B_2^n \subseteq K$ και υπάρχουν $u_1,\dots,u_m \in \partial K \cap \partial B_2^n$ (σημεία επαφής) και $c_i>0$ $\sum_{i=1}^m c_i\, u_i \otimes u_i = I_n$

$\sum_{i=1}^m c_i u_i u_i^T = I_n$

<u>Μη συμμετρική περίπτωση</u> πρέπει να προσθέσουμε τη συνθήκη $\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0$

<u>Απόδειξη</u> (Συμμετρική περίπτωση)



($\Leftarrow$)

Ορίζω το $L=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,u_i\rangle \le 1\ \forall i\}$

- $K\subseteq L$
- Αν $\mathcal{E}$ ελλειψοειδής με $\mathcal{E}\subseteq L$, τότε $|\mathcal{E}|\le |B_2^n|$

<u>Απόδ ισχυρισμών:</u>

- Έστω $y\in K$ τοδο $\langle y,u_i\rangle \le \|y\|_K \|u_i\|_{K^\circ}$ γιατί $\frac{y}{\|y\|_K}\in K$ και $\frac{u_i}{\|u_i\|_{K^\circ}}\in K^\circ$ άρα $\left\langle \frac{y}{\|y\|_K}, \frac{u_i}{\|u_i\|_{K^\circ}}\right\rangle \le 1$

όμως $\|y\|_K\le 1$ και $u_i\in K$ και $u_i\in K^\circ$ άρα $\|u_i\|_{K^\circ}=1$

οπότε $\langle y,u_i\rangle \le 1$ άρα $K\subseteq L$

- $\mathcal{E}=\left\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{\langle x,v_i\rangle}{a_i^2}\le 1\right\}$. Τότε $|\mathcal{E}|=\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)|B_2^n|$

άρα αρκεί νδο $\prod_{i=1}^n a_i \le 1$

Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ αρκεί νδο $\sum_{i=1}^n a_i \le n$ $\left(\prod_{i=1}^n a_i \le \left(\frac{\sum a_i}{n}\right)^n\right)$

<u>παρατήρηση</u>: Επειδή $\sum_{i=1}^m c_i u_i u_i^T = I_n$ έχουμε:

$\sum_{i=1}^m c_i \langle x,u_i\rangle u_i = x$ και $\sum_{i=1}^m c_i\langle x,u_i\rangle^2 = \|x\|_2^2$

Έχουμε $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \|v_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} c_j \langle v_i, u_j\rangle^2$

$= \sum_{j=1}^{m} c_j \langle \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_j, v_i\rangle v_i}_{y_j}, u_j\rangle$

Επίσης παίρνοντας trace στο $\sum_{i=1}^{m} c_i u_i u_i^T = I_n$ παίρνουμε $\sum_{i=1}^{m} c_i = n$

~~[illegible]~~ Θέλω $y_j \in \mathcal{E}$. αν τα βάλαμε στην εξ. του ελλειψοειδούς

$\sum_{k=1}^{n} \langle u_i, v_k\rangle^2 = \|u_i\|_2^2 = 1$ για $u_i \in B_2^n$ και

άρα $\sum c_j \langle y_j, u_j\rangle \leq \sum c_j = n$

~~[illegible]~~

$\leq \sum c_j \|y_j\|_L \|u_j\|_{L^\circ}$

$(\Longrightarrow)$ Σύντομα Ορίζουμε το $U = \{u\otimes u : u \in S^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$

Έστω $\frac{I_n}{n} \notin \mathrm{conv}\, U$ και κάνω διαχωριστικό

τότε υπάρχει φ γραμμικό συναρτησοειδές με $\varphi\left(\frac{I}{n}\right) < \varphi(u\otimes u)$ $\forall u \in \partial K \cap \partial S^{n-1}$

ο χώρος πινάκων είναι χώρος Hilbert με εσωτ. γινόμενο $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$

και από το Θ. Riesz $\varphi = \langle \cdot, H\rangle$ με H $n\times n$ πίνακας ώστε

$\forall A$ πίνακα $n\times n$ $\varphi(A) = \langle A, H\rangle = \sum_{jk} h_{jk} a_{jk}$

$" (a_{jk})$

Θα δείξουμε ότι αν B_2^n το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου, τότε
$B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}\, B_2^n$

Έστω $x \in K$. Θ.ν.δ.ο $\|x\|_2 \le \sqrt{n}$. $\|x\|_2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle^2 \le$

$$\le \sum_{j=1}^{m} c_j \|x\|_K^2 \|u_j\|_{K^\circ}^2 \le \sum_{j=1}^{m} c_j = n$$

K

$\|\cdot\|_2$ $\|\cdot\|_K$ $\|\cdot\|_2$

$\exists T: \forall x \in K \ \ \|x\|_2 \le \|Tx\|_K \le d\,\|x\|_2$
και το Θ. John $d = \sqrt{n}$

<u>Γενίκευση</u>: X, Y χώροι με νόρμα, ψάχνω T ώστε $B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq d\, B_Y$

απόσταση Banach-Mazur

Αν X, Y χώροι με νόρμα από Θ. John $\Rightarrow d(X,Y) \le n$
είναι βέλτιστο;

<u>Gluskin</u>: $\exists X, Y \ \ d(X,Y) \ge cn$ όπου c είναι απόλυτη σταθερά

Στην μη-συμμετρική περίπτωση $d(X,Y) \le n^2$
Θ. Rudelson $d(X,Y) \le n^{\frac{4}{3}}$ ← είναι βέλτιστο; <u>ανοιχτό</u>

$Y = \ell_p^n$
- $d(X, \ell_1^n) \le n$ θα το δείξουμε
- $d(X, \ell_\infty^n) \le n^{\frac{5}{6}}$ ← Γιαννόπουλος

Λήμμα (Auerbach)

Έστω X χώρος με νόρμα, διάστασης n. Μπορεί να βρεί $x_1, \dots, x_n \in X$ και $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ ώστε $\|x_i\| = \|x_i^*\| = 1$ και $x_i^*(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$