

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Φυλλάδιο Ασκήσεων 9

Παραδώστε τις ασκήσεις: 9.2, 9.5, 9.6

Άσκηση 9.1 Υπολογίστε το αποτέλεσμα των παρακάτω πράξεων μεταξύ κλάσεων.

$$[8]_{15} + [13]_{15}, [8]_{15} \cdot [11]_{15}, [-27]_{11} + [7]_{11}, [3^7]_{10}.$$

Άσκηση 9.2

- (i) Δείξτε ότι $\text{μκδ}(70, 101) = 1$.
- (ii) Υπολογίστε ακραίους s, t τέτοιους ώστε $70s + 101t = 1$.
- (iii) Υπολογίστε κλάση x τέτοια ώστε $[70]_{101} \cdot x = [1]_{101}$.

Άσκηση 9.3 Σήμερα είναι Παρασκευή. Τι μέρα θα έχουμε σε 3^{2025} ημέρες;

Άσκηση 9.4 Ποιό είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 7^{2001} ;

Άσκηση 9.5 Το ρολόι έχει ενδείξεις για τις ώρες από 0 έως 11. Τώρα δείχνει 1. Τι ώρα θα δείχνει σε $5^{1111} \cdot 7^{1010}$ ώρες;

Άσκηση 9.6

- (i) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ ακέραιοι $1 \leq k \leq n$ οι οποίοι διαιρούνται από το d .
- (ii) Υπολογίστε πόσοι ακέραιοι $1 \leq k \leq 1000$ διαιρούνται από το 30.
- (iii) Υπολογίστε πόσοι ακέραιοι $1 \leq k \leq 1000$ διαιρούνται από το 30 και το 11.
- (iv) Υπολογίστε πόσοι ακέραιοι $1 \leq k \leq 1000$ διαιρούνται από το 30 και το 12.
- (v) Υπολογίστε πόσοι ακέραιοι $1 \leq k \leq 1000$ διαιρούνται από το 30 ή το 11.

Άσκηση 9.7 Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν 15 ερωτήσεις τύπου Σωστό/Λάθος. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να απαντήσει το διαγώνισμα ένας φοιτητής;

- (i) αν έχει τη επιλογή να αφήσει κενές κάποιες απαντήσεις;
- (ii) αν δεν έχει τη επιλογή να μην απαντήσει κάποιες από τις ερωτήσεις;

Άσκηση 9.8 Έστω ότι θέλουμε να συστήσουμε πενταμελές συμβούλιο από σύνολο 20 ατόμων. Στο συμβούλιο θα εκλεγούν πέντε μέλη εκ των οποίων ένα θα είναι πρόεδρος και ένα αντιπρόεδρος. Τα άλλα τρία (απλά) μέλη θεωρούνται ισότιμα μεταξύ τους.

- (i) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
- (ii) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι στο συμβούλιο θα συμμετέχει ο φοιτητής A ως προεδρος (ο A είναι ένα από τα 20 άτομα)
- (iii) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι στην επιτροπή θα συμμετέχει ο φοιτητής A είτε ως πρόεδρος είτε ως απλό μέλος
- (iv) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι στην επιτροπή θα συμμετέχει ο φοιτητής A ως πρόεδρος, ή η φοιτήτρια B ως αντιπρόεδρος (ή και οι δύο, με αυτές τις δύο ιδιότητες). (η φοιτήτρια B είναι ένα από τα 20 άτομα)

Άσκηση 9.9 Έστω οι φυσικοί αριθμοί n, m, k με $1 < k < m < n$.

- (i) Πόσα υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, n\}$ περιέχουν τους αριθμούς $1, \dots, k$;
- (ii) Πόσα υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, n\}$ περιέχουν τους αριθμούς $1, \dots, k$ και δεν περιέχουν κανένα από τους αριθμούς $k + 1, \dots, m$;

Άσκηση 9.10 Πόσες διατεταγμένες τριάδες (A, B, C) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, n\}$ υπάρχουν; Πώς γενικεύεται για περισσότερα από τρία σύνολα;