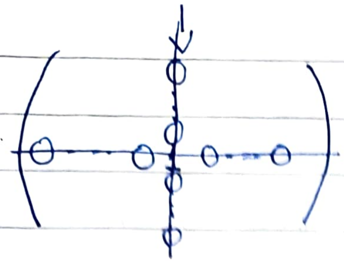


Αυτό σημαίνει ότι το ακραίο σημείο είναι,

Ξεκινάμε τη στήλη και τη γραμμή και ο πίνακας που μένει είναι DS_{n-1} και είναι ακραίο σημείο, επομένως από επαγωγή έχουμε το ζητούμενο

08/04/2025

Πλήθος εδρών σε πολύτοπα

Το f-διάνυσμα ενός πολυτόπου $P \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι το $f(P) = (f_0(P), f_1(P), \dots, \overset{\text{facets}}{f_{d-1}(P)}, f_d(P))$ όπου $f_k(P)$ το πλήθος των k-διάστατων εδρών.

π.χ. Αν P είναι simplex, δηλ. είναι κυρτή θήκη $d+1$ σημείων, τότε $f_k(P) = \binom{d+1}{k+1}$

Ερώτημα: Αν $f_0(P) = n$, για κάποιο n, πόσο μπορεί να είναι το $f_{d-1}(P)$; (ή το $\sum_{k=0}^{d} f_k(P)$)

Στο $\mathbb{R}^2$ $(n, n, 1)$

Στο $\mathbb{R}^3$ $(n, \underset{\text{ακμές}}{e}, \underset{\text{έδρες}}{f}, 1)$ Ισχύει ο τύπος του Euler $n + f = e + 2$

Πρέπει να κάνω αντιστοιχία τα P σε γράφημα. Προβάλλουμε τις κορυφές σε μια σφαίρα που περιέχει το πολύτοπο και κάνουμε στερεογραφική προβολή

Πρόταση

$e \leq 4n - 6$
$f \leq 2n - 4$
| Αρκεί να τις αποδείξω για γραφήματα

Απόδειξη

Διπλομετράω το πλήθος των ζευγών (ακμή, έδρα). Κάθε ακμή είναι σε ακριβώς 2 έδρες και κάθε έδρα έχει τουλάχιστον 3 ακμές

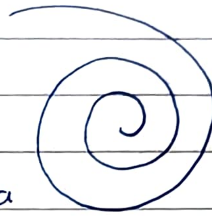
Άρα $2e \geq 3f$

οπότε $n+f=e+2$ $\quad n+f \geq \frac{3}{2}f+2 \Rightarrow f \leq 2n-4$

όμοια για το e

Θα κατασκευάσουμε παράδειγμα με $n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ $d-1$ διάστατες έδρες

Η moment curve στον $\mathbb{R}^d$ είναι η καμπύλη $\gamma = \{(t, t^2, \dots, t^d), t \in \mathbb{R}\}$



Λήμμα:

Κάθε υπερεπίπεδο H τέμνει την γ το πολύ σε d σημεία και αν την τέμνει σε ακριβώς d, τότε το H δεν εφάπτεται στην γ

Απόδειξη

Έστω $H=\{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle = b\}$. Τότε $H \cap \gamma$ είναι το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{d} a_i t^i = b\}$ Το αριστερό μέλος είναι πολυώνυμο βαθμού d, έστω $P(t)$ άρα $P(t)-b$ έχει το πολύ d ρίζες

Αν έχει ακριβώς d ρίζες, τότε είναι όλες απλές, άρα αλλάζει πρόσημο σε καθεμία άρα το H δεν εφάπτεται στην γ

Πόρισμα

Οποιαδήποτε d σημεία στην γ είναι αφινικά ανεξάρτητα

Απόδειξη

Έστω ότι μπορώ να βρω d σημεία στην γ, αφινικά εξαρτημένα, τότε μπορώ να βρω υπερεπίπεδο που να περιέχει μαζί αυτά με ένα σημείο της γ

Άτοπο αφού $H \cap \gamma$ έχει το πολύ d σημεία

Αν πάρω την κυρτή θήκη πεπερασμένα το πλήθος σημείων από την γ, φτιάχνω ένα πολύτοπο το οποίο ονομάζουμε <u>κυκλικό πολύτοπο</u> (cyclic)

Οι $d-1$ διάστατες έδρες καθορίζονται από d σημεία (Από το πόρισμα, δεν μπορεί να έχω δύο d-άδες που να δίνουν την ίδια έδρα

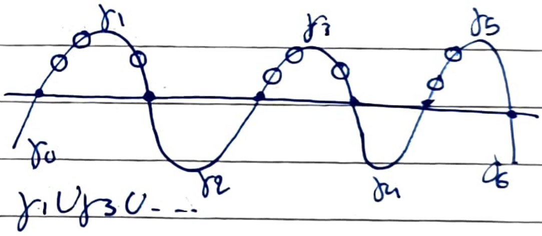
Αν $u,v \in \gamma$, τότε γράφω $u<v$, αν το v παράγεται από μεγαλύτερο t

<u>Πρόταση</u> (Gale)
Έστω V το σύνολο κορυφών ενός κυκλικού πολύτοπου στον $\mathbb{R}^d$, και έστω $F=\{v_1,v_2,\dots,v_d\} \subseteq V$, ώστε $v_1 < v_2 < \dots < v_d$. Τότε το F ορίζει μια έδρα του P αν και μόνο αν για κάθε $u,v \in V \setminus F$, ισχύει ότι το πλήθος των $i : v < v_i < u$ είναι άρτιο

<u>Απόδειξη</u>

Έστω H η αφινική θήκη του F. Από ότι δείξαμε πριν, το H είναι υπερεπίπεδο
Έστω P το κυκλικό πολύτοπο
Το $P \cap H$ είναι έδρα αν και μόνο αν το P είναι όλο σε έναν από τους ημιχώρους που ορίζονται από το H. Προφανώς $H \cap \gamma = F$ και η γ διαμερίζεται σε $d+1$ κομμάτια, $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d$

Το λήμμα που δείξαμε δίνει ότι κάθε γ_i είναι εξ' ολοκλήρου στο H^- ή H^+



Οπότε το $V \setminus F$ είναι είτε το $\gamma_0 \cup \gamma_2 \cup \dots$ ή το $\gamma_1 \cup \gamma_3 \cup \dots$
άμεσα προκύπτει το ζητούμενο

Θεώρημα

Κάθε κυκλικό πολύτοπο $P \subseteq \mathbb{R}^d$ με n κορυφές έχει $\begin{cases} \binom{n-\lfloor d/2 \rfloor}{\lfloor d/2 \rfloor} + \binom{n-\lfloor d/2 \rfloor -1}{\lfloor d/2 \rfloor -1} & d \equiv 0 \bmod 2 \\ 2\binom{n-\lfloor d/2 \rfloor -1}{\lfloor d/2 \rfloor} & d \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$ έδρες

Απόδειξη

Από την πρόταση του Gale, αρκεί να μετρήσω το πλήθος των διατάξεων d μαύρα σημεία και $n-d$ άσπρα, ώστε ανάμεσα σε δύο άσπρα να έχω άρτιο πλήθος μαύρων

Αν $d=2k+1$

$$\overset{\text{περιττά}}{\downarrow}$$
$$\blacksquare\bullet\bullet\ \circ \bullet\bullet\bullet\bullet \circ \bullet\bullet \circ \bullet\bullet\bullet\bullet \circ \bullet\bullet$$

Θα έχω περιττό πλήθος από μαύρα, είτε πριν το πρώτο άσπρο είτε μετά το τελευταίο άσπρο

Έστω ότι έχω πριν το πρώτο και σβήνω το πρώτο μαύρο

Τότε έχω να τοποθετήσω $2k$ μαύρα ανάμεσα σε $n-2k-1$ άσπρα

Είναι σαν να έχω k δυάδες, οπότε το πλήθος είναι οι συνδυασμοί με επανάληψη $\binom{n-2k-1+k}{k} = \binom{n-k-1}{k}$

και αν πάρουμε περιττό πλήθος μαύρων στο τέλος έχουμε άλλα τόσα οπότε $2\binom{n-k-1}{k}$

Όταν $d=2k$ Είτε έχω άρτιο πλήθος μαύρων πριν το πρώτο και μετά το τελευταίο

ή >> περιττό >> >>

Στην 1η περίπτωση είναι $\binom{n-2k+k}{k} = \binom{n-k}{k}$

Στη δεύτερη σβήνω από ένα μαύρο (στην αρχή και το τέλος) και το πλήθος είναι $\binom{n-2k+k-1}{k-1} = \binom{n-k-1}{k-1}$

Θεώρημα (McMullen)
Ανάμεσα όλα τα πολύτοπα P με $f_0(P)=n$, $f_k(P) \leq f_k(C)$ όπου C το κυκλικό πολύτοπο με n κορυφές.

Ελλειψοειδές είναι κάθε σύνολο της μορφής $E = T(B_2^n) + a$, όπου T γραμμικός, $a \in \mathbb{R}^d$

Πρόταση
Αν E είναι ένα ελλειψοειδές τότε μπορώ να βρω S γραμμικός του οποίου ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος, δηλ $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $\langle Sx, x\rangle > 0$

Απόδειξη
Κάθε τετραγωνικός πίνακας T γράφεται ως SU όπου S θετικά ορισμένος και ο U unitary, δηλ ο ορθογώνιος μετασχηματισμός
άρα $E = T(B_2^n) + a = SU(B_2^n) + a = S(B_2^n) + a$

Θεώρημα
Αν X, Y θετικά ορισμένοι $d \times d$ πίνακες, τότε $\det\left(\frac{X+Y}{2}\right) \geq \sqrt{\det(X)\det(Y)}$
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $X = Y$

Απόδειξη

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A^{1/2}x, A^{1/2}x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|A^{1/2}x\|_2^2} dx \underset{dy = \det(A)^{1/2}dx}{\overset{y = A^{1/2}x}{=}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|_2^2} \frac{dy}{\det(A)^{d/2}} = \frac{c}{\det(A)^{d/2}}$$

Αρκεί νδο $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Xu, u\rangle} du \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Yu, u\rangle} du \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \frac{X+Y}{2}u, u\rangle} du \right)^2$

που προκύπτει από Cauchy-Schwartz

10/04/2025

Θεώρημα

Έστω $K\subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σώμα. Από όλα τα ελλειψοειδή που περιέχονται στο K, υπάρχει μοναδικό μέγιστου όγκου

Απόδειξη

Κάθε ελλειψοειδής έχει τη μορφή

$\mathcal{E} = S(B_2^d)+a$, όπου S θετικά ορισμένος και $a\in\mathbb{R}^d$

Άρα σε κάθε $\mathcal{E}\subseteq K$ αντιστοιχίζω το ζεύγος (S, a)

Ονομάζω $\mathcal{X}$ το σύνολο όλων αυτών των ζευγών και θέλω $\mathcal{X}$ φραγμένο

Άρα K συμπαγές $K\subseteq B(0,R)$ οπότε αν $(S,a)\in\mathcal{X}$ τυχόν, τότε

$\|a\|_2\le R$ και $\|Sx+a\|_2\le R \Rightarrow \|Sx\|_2\le \|a\|_2+R\le 2R$

Αυτό δίνει ότι το $\mathcal{X}$ είναι φραγμένο στο $Sym_{d\times d}\times\mathbb{R}^d\subseteq\mathbb{R}^{d^2}\times\mathbb{R}^d$

Το $\mathcal{X}$ είναι κλειστό επίσης, οπότε $\mathcal{X}$ συμπαγές

Επιπλέον $|\mathcal{E}|=\det(S)|B_2^d|$

Η συνάρτηση $(S,a)\longmapsto \det S$ είναι συνεχής, άρα παίρνει μέγιστη τιμή

Για την μοναδικότητα ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq K$

με $|\mathcal{E}_1|=|\mathcal{E}_2|$ μέγιστα

$$\mathcal{E}_1 \Downarrow (S_1,a_1) \qquad \mathcal{E}_2 \Downarrow (S_2,a_2)$$

Θεωρούμε το $\mathcal{E}=\dfrac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2}{2}$, το οποίο:

i) Είναι ελλειψοειδές γιατί $\mathcal{E} = \left(\dfrac{S_1+S_2}{2}\right)(B_2^d)+\dfrac{a_1+a_2}{2}$

ii) $\mathcal{E}\subseteq K$ αφού K κυρτό

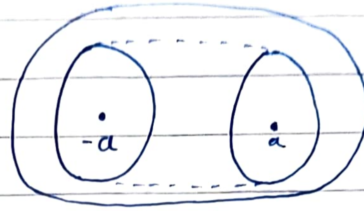
iii) $|\mathcal{E}| = \det\left(\dfrac{S_1+S_2}{2}\right)|B_2^d| \overset{\text{προηγούμενο}}{\ge} \sqrt{\det(S_1)\det(S_2)}\,|B_2^d| = |\mathcal{E}_1|=|\mathcal{E}_2|$

Άρα πρέπει να ισχύει η ισότητα, άρα $S_1=S_2$

Άρα $\mathcal{E}_1 = S(B_2^d)+a_1$ και $\mathcal{E}_2 = S(B_2^d)+a_2$. Μένει νδο $a_1=a_2$

Εφαρμόζω γραμμικό μετασχ. και υποθέτω ότι $\mathcal{E}_1=\{x\in\mathbb{R}^d: \|x-a\|_2\le 1\}$ και $\mathcal{E}_2=\{x\in\mathbb{R}^d: \|x+a\|\le 1\}$ με $a=(0,0,\dots,0,s)$

Ορίζουμε $\mathcal{E}=\{x\in\mathbb{R}^d: x_1^2+x_2^2+\dots+x_{d-1}^2+\frac{x_d^2}{(1+s)^2}\le 1\}$



• Ισχυρισμός $\mathcal{E}\subseteq conv(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$

Απόδ.

Έστω $x\in\mathcal{E}$. Αν $|x_d|\le s$ τότε $\mathcal{E}$ περιέχεται στον κύλινδρο ο οποίος περιέχεται στο $conv(\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)$

Αν $|x_d|>s$, επειδή $x\in\mathcal{E}$ $\frac{x_d^2}{(1+s)^2}\le 1$ άρα $|x_d|\le s+1$

και τότε $(x_d-s)^2\le \frac{x_d^2}{(1+s)^2} \iff (1+s)^2\le \left(\frac{x_d}{x_d-s}\right)^2 \iff (1+s)^2\le\left(1+\frac{s}{x_d-s}\right)^2$

Αν $x_d>0$ από την $|x_d|\le s+1$ $x_d-s\le 1$ άρα $x\in\mathcal{E}_1$, ενώ αν $x_d<0$, $x\in\mathcal{E}_2$

και $|\mathcal{E}|=(1+s)|B_2^d|$ και $|\mathcal{E}_1|=|\mathcal{E}_2|=|B_2^d|$ άρα $\underline{s=0}$

και άρα επειδή είχαμε εφαρμόσει γραμμικό μετασχηματισμό $a_1=a_2$.

Θεώρημα (John)

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σώμα και έστω $\mathcal{E}$ το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου $\mathcal{E} \subseteq K$. Τότε $K \subseteq d\mathcal{E}$ ← είναι βέλτιστο

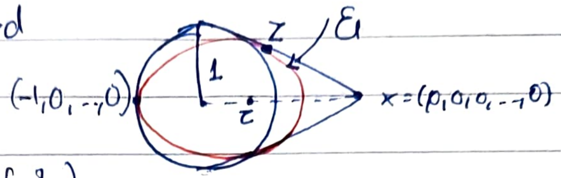
Απόδειξη

Άρα $\mathcal{E} \subseteq K \Rightarrow S(B_2^d)+a \subseteq K \Rightarrow B_2^d + S^{-1}a \subseteq S^{-1}(K)$

$\Rightarrow B_2^d \subseteq S^{-1}(K) - S^{-1}a$

Μπορώ να υποθέσω ότι η B_2^d είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου στο K, και θέλω $K \subseteq dB_2^d$. Αν όχι $\exists x \in K : \|x\|_2 > d$

Υποθέτω ότι $x=(\rho,0,\dots,0)$ με $\rho > d$



Θεωρώ το σύνολο $C=\mathrm{conv}(B_2^d \cup \{x\})$

Ζητάω ελλειψοειδές $\mathcal{E}_1=\left\{x\in\mathbb{R}^d : \frac{(x_1-\tau)^2}{a^2}+\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=2}^{d} x_i^2 \le 1\right\}$

Θα δουλέψουμε στο $\mathbb{R}^2$

Άρα $\mathcal{E}_1$ εφάπτεται στο ~~[illegible]~~ $(-1,0)$ έστω $a=\tau+1$

Αν $z=(z_1,z_2)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\frac{z_1-\tau}{a^2}(x_1-\tau)+\frac{z_2x_2}{\beta^2}=1$

Αυτή η ευθεία περνάει από το $(\rho,0)$, άρα $\frac{(z_1-\tau)^2}{a^2}=\frac{a^2}{(\rho-\tau)^2}$

Η κλίση είναι $-1/\sqrt{\rho^2-1}$, οπότε $\frac{z_2^2}{\beta^2}=\frac{\beta^2(\rho^2-1)}{(\rho-\tau)^2}$

Τελικά, $a=\tau+1$ και $\beta^2=\frac{(\rho-\tau)^2-(\tau+1)^2}{\rho^2-1}=1-\frac{2\tau}{\rho-1}$

και $\mathcal{E}_1 \subseteq K$ και $|\mathcal{E}_1| = a\beta^{d-1}|B_2^d|$

Αρκεί $a\beta^{d-1}>1 \Leftrightarrow \log a + \frac{d-1}{2}\log\beta^2 > 0$

$\log(\tau+1)=\tau+O(\tau^2)$

$$\log a + \frac{(d-1)}{2}\log\theta^2 > 0$$

$$\tau + O(\tau^2) + \frac{d-1}{2} + \frac{d-1}{2}\left(\frac{-2\tau}{p-1}\right) + O(\tau^2) = \tau - \tau\frac{d-1}{p-1} + O(\tau^2)$$

$$= \tau\left(1 - \frac{d-1}{p-1}\right) + O(\tau^2) = \frac{\tau(p-d)}{p-1} + O(\tau^2)$$

οπότε για αρκετά μικρό τ προκύπτει το ζητούμενο

Αν είχαμε επιπλέον K συμμετρικό, τότε $\mathcal{E} \subseteq K \subseteq \sqrt{d}\,\mathcal{E}$