

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Παραδώστε τις ασκήσεις: 8.4, 8.5, 8.6.

Άσκηση 8.1 Με χρήση του Ευκλείδειου αλγόριθμου υπολογίστε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των 252 και 180 και βρείτε $s, t \in \mathbb{Z}$ τέτοιους ώστε $252s + 180t = \mu\kappa\delta(252, 180)$.

Άσκηση 8.2 Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Εάν $a \mid b$, δείξτε ότι $\mu\kappa\delta(a, b) = |a|$.

Άσκηση 8.3 Αν $\mu\kappa\delta(a, b) = 1$ να αποδειχθεί ότι $\mu\kappa\delta(a + b, a^2 - ab + b^2) = 1$ ή 3.

Άσκηση 8.4 Να αποδειχθεί ότι $\mu\kappa\delta(a + b, 5a + 6b) = \mu\kappa\delta(a, b)$.

Άσκηση 8.5 Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό n ισχύει ότι $\mu\kappa\delta(n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1) = 1$ ή 5.

Άσκηση 8.6 Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται αναδρομικά:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ για κάθε } n \geq 2.$$

Αποδείξτε με επαγωγή στο n ότι $\mu\kappa\delta(a_{n+1}, a_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 8.7 Έστω p πρώτος αριθμός και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε με επαγωγή στο n , ότι αν $p \mid a_1 \cdots a_n$ τότε $p \mid a_i$ για κάποιο $1 \leq i \leq n$.

Άσκηση 8.8 Έστω πρώτος αριθμός p και φυσικοί αριθμοί q, n . Εάν $p \mid q^n$ δείξτε ότι $p^n \mid q^n$.

Άσκηση 8.9 Έστω φυσικός αριθμός $n \geq 2$. Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός στο διάστημα $[n! + 2, n! + n]$ είναι σύνθετος. Βρείτε 100 διαδοχικούς φυσικούς, κανένas από τους οποίους να μην είναι πρώτος.