Εφαρμογή 4

Αν $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ μη-κενά, κυρτά και συμπαγή, τότε $K_1 \subseteq K_2 \iff h_{K_1} \le h_{K_2}$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Αν $K_1 \subseteq K_2$ τότε $h_{K_1}(y) = \max_{x\in K_1}\langle x,y\rangle \le \max_{x\in K_2}\langle x,y\rangle = h_{K_2}(y)$

($\Leftarrow$) Έστω $h_{K_1} \le h_{K_2}$, και ότι υπάρχει $x\in K_1$, αλλά $x\notin K_2$

Τότε διαχωρίζουμε το x από το K_2, δηλαδή υπάρχει $y\in\mathbb{R}^n$
ώστε $\langle z,y\rangle < \langle x,y\rangle \ \forall z\in K_2$

Παίρνω max ως προς $z\in K_2$, άρα $\max_{z\in K_2}\langle z,y\rangle < \langle x,y\rangle \Rightarrow h_{K_2}(y) < h_{K_1}(y)$

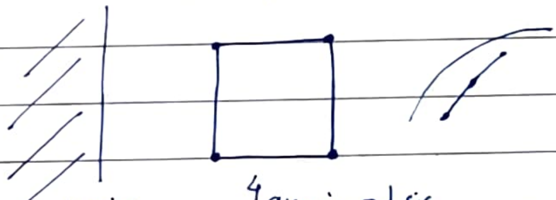
Άτοπο

01/04/2025

Ακραία Σημεία

Ορισμός

Έστω K συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$ και κυρτό. Το $x\in K$ λέγεται ακραίο σημείο αν δεν μπορεί να γραφεί ως $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ με $x_1\neq x_2\in K$, $0<\lambda<1$



Λήμμα:

Κάθε έδρα διάστασης 0 (ενός κυρτού συμπαγούς) είναι ακραίο σημείο

Απόδειξη

Έστω $\{x\} = K\cap H \leftarrow$ έδρα διάστασης 0

Θέλω το x είναι ακραίο σημείο του K

Έστω $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $x_1,x_2\in K$, $x_1\neq x_2$ και $\lambda\in(0,1)$

το ευθύγραμμο τμήμα $[x_1,x_2]$ είναι μέσα στο K άρα $x\in \mathrm{conv}\{x_1,x_2\}\cap H$
$= \mathrm{conv}(\{x_1,x_2\}\cap H)$

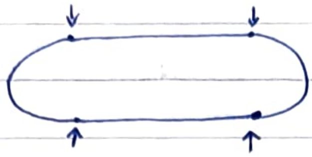
Χρησιμοποιούμε ότι $\mathrm{conv}(A)\cap H = \mathrm{conv}(A\cap H)$

Το δεξί μέλος δεν μπορεί να είναι κενό. Επίσης $\mathrm{conv}\{x_1,x_2\}\cap H \subseteq K\cap H = \{x\}$

~~01/10/2025~~

και άρα $\{x\} = conv(\{x_1,x_2\}\cap H)$. Επομένως $\{x_1,x_2\}\cap H$ είναι μονοσύνολο, έστω $\{x_1,x_2\}\cap H = \{x_1\}$. Αλλά τότε $x = x_1$ <u>Άτοπο</u>

<u>Το αντίστροφο δεν ισχύει:</u>



<u>Λήμμα</u>

Έστω F μια έδρα του κυρτού και συμπαγούς $K\subseteq\mathbb{R}^n$ και έστω $x\in F$. Τότε το x είναι ακραίο σημείο της F αν και μόνο αν είναι ακραίο σημείο του K.

<u>Απόδειξη</u>

Η μια κατεύθυνση είναι προφανής άρα $F\subseteq K$, η $(\Leftarrow)$

Για την $(\Rightarrow)$ αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $F = K\cap H$ και ότι $K\subseteq H^-$ και $x\in F$ ακραίο σημείο

Έστω ότι το x δεν είναι ακραίο σημείο του K και $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ $(*)$, $x_1,x_2\in K$, $\lambda\in(0,1)$, $x_1\neq x_2$

Όπως πριν δείξαμε $x\in conv(\{x_1,x_2\}\cap H)$, άρα $\{x_1,x_2\}\cap H\neq\emptyset$ και έστω $x_1\in H$.
Εφόσον $x\in H$ και H υπερεπίπεδο, όλη η ευθεία xx_1 είναι στο H, άρα $x_2\in H$.
<u>Άτοπο</u> από την $(*)$ άρα $x\in H$ είναι ακραίο

<u>Θεώρημα</u> (Minkowski)

Αν K κυρτό και συμπαγές $\subseteq\mathbb{R}^n$, και E είναι το σύνολο των ακραίων σημείων του, τότε $K = conv(E)$

(ισχύει και σε απειροδιάστατους χώρους)

<u>Απόδειξη</u>

Άρα $E\subseteq K$ και K κυρτό, $conv(E)\subseteq K$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n

$n=1$ ✓. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $d<n$ και έστω $x\in K$

Αν $x\in bd(K)$ τότε μπορώ να βρω υπερεπίπεδο στήριξης στο x, άρα $x\in F$, όπου F είναι έδρα του K. Όμως $\dim(F)<n$, άρα από επαγωγική υπόθεση το $x\in conv(E_F)$ όπου E_F τα ακραία σημεία της έδρας

όμως $E_F \subseteq E \Rightarrow conv(E_F) \subseteq conv(E)$, οπότε $x \in conv(E)$

Αν $x \notin bd(K)$, μπορώ να βρω $x_1, x_2 \in bd(K)$ και $x \in [x_1, x_2]$. Όμως ισχύει
$x_1 \in conv(E)$, $x_2 \in conv(E)$ $\Rightarrow x \in conv(E)$

Ακραία σημεία πολυτόπων

Υπενθύμιση:
{Πολύτοπο είναι η κυρτή θήκη πεπερασμένου πλήθους σημείων}

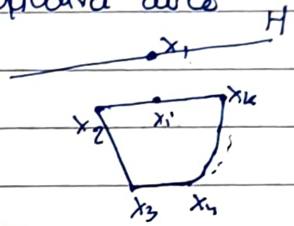
Πρόταση

Πρέπει θδο κάθε πολύτοπο είναι η κυρτή θήκη των κορυφών του (δηλ. των εδρών διάστασης 0)

Απόδειξη

Έστω $P = conv\{x_1, \dots, x_k\}$ με $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$

Έστω k ο ελάχιστος φυσικός για τον οποίο συμβαίνει αυτό



Άρα k ο ελάχιστος, $x_1 \notin conv\{x_2, \dots, x_k\}$

Βρίσκω x_1' το πλησιέστερο σημείο στο x_1

Έστω H το υπερ. στήριξης να περνάει από το x_1
και είναι παράλληλο σε αυτό του x_1'. $H \cap P = H \cap conv\{x_1, \dots, x_k\}$

$H \cap P = conv(H \cap \{x_1, \dots, x_k\})$

Άρα $H \cap P = \{x_1\}$. Με άλλα λόγια το x_1 είναι κορυφή, δηλ. έδρα διάστασης 0

Για το άλλο εγκλεισμό:

Έστω x κορυφή, δηλ. $\{x\} = P \cap H$, όπου H υπερεπίπεδο στήριξης

Τότε $\{x\} = conv\{x_1, \dots, x_k\} \cap H = conv(\{x_1, \dots, x_k\} \cap H)$

Άρα $\{x_1, \dots, x_k\} \cap H = \{x\}$ και ισχύει $x = x_i$ για κάποιο $x_i \in \{x_1, \dots, x_k\}$

Θεώρημα:
Έστω $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα πολύτοπο, V το σύνολο των κορυφών του, E το σύνολο των ακραίων σημείων. Τότε $V = E$

Απόδειξη

Ο εγκλεισμός $V \subseteq E$ αποδείχθηκε στην αρχή (κάθε κορυφή είναι ακραίο σημείο)
Αν $x \in P \setminus V$, τότε από την πρόταση μπορώ να γράψω $x = \sum_i \lambda_i x_i$ για κάποια $x_i \in V$, $\lambda_i \in (0,1)$ $\sum_i \lambda_i = 1$

$$x = \underbrace{\lambda_1 x_1}_{\in P} + (1-\lambda_1)\underbrace{\left[\frac{\lambda_2 x_2}{1-\lambda_1} + \frac{\lambda_3 x_3}{1-\lambda_1} + \dots + \frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_1}\right]}_{\in P}$$

και $x_1 \neq \frac{\lambda_2 x_2}{1-\lambda_1} + \dots + \frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_1}$ γιατί $x_1 \notin conv\{x_2, \dots, x_k\}$

Επομένως, $x \in P \setminus E$ οπότε $P \setminus V \subseteq P \setminus E \Rightarrow E \subseteq V$ Άρα $E = V$

03/04/2025

Θεώρημα:
Έστω $f: K \to \mathbb{R}$, K κυρτό, συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$ συνεχής και κυρτή. Τότε, αν $M = \max_{x \in K} f(x)$, $\exists z \in ext(K) : f(z) = M$
ακραία σημεία

Απόδειξη

Άρα f συνεχής σε συμπαγές παίρνει μέγιστη τιμή, έστω $f(x) = M$
Όμως, $x \in K = conv(ext(K))$, άρα $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ με $\lambda_i \geq 0$ $\sum \lambda_i = 1$, $x_i \in ext(K)$
Οπότε $M = f(x) = f(\sum \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) \leq \max_i f(x_i)$
και άρα $\max_i f(x_i) = M$

Σκοπός: Κάθε φραγμένο πολύεδρο είναι πολύτοπο και κάθε πολύτοπο είναι πολύεδρο

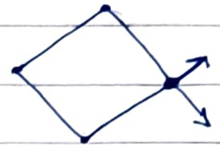
Υπενθύμιση: πολύτοπο: κυρτή θήκη πεπερ. το πλήθος σημείων
πολύεδρο: Τομή ημιχώρων $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq a_i, i = 1, \dots, m\}$

Λήμμα:

Έστω $P=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,u_i\rangle \le a_i, i=1,\dots,m\}$ ένα πολύεδρο. Για κάθε $y\in P$ ορίζουμε $I(y)=\{i : \langle y,u_i\rangle = a_i\}$. Το y είναι ακραίο σημείο αν και μόνο αν το $\{u_i : i\in I(y)\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^n$

Απόδειξη

($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι το $U=\{u_i : i\in I(y)\}$ παράγει τον $\mathbb{R}^n$ και $y=(1-\lambda)y_1+\lambda y_2$ με $y_1,y_2\in P$ και $\lambda\in(0,1)$



Τότε για κάθε $i\in I(y)$ έχουμε:

$\cancel{a_i < y, y}$

$$a_i = \langle y,u_i\rangle = \langle (1-\lambda)y_i + \lambda y_2, u_i\rangle = (1-\lambda)\langle y_1,u_i\rangle + \lambda\langle y_2,u_i\rangle$$
$$\le (1-\lambda)a_i + \lambda a_i = a_i$$

Επομένως $\langle y_1,u_i\rangle = \langle y_2,u_i\rangle = a_i \ \forall i\in I(y)$

$\Rightarrow \langle y_1-y_2,u_i\rangle = 0 \ \forall i\in I(y) \Rightarrow y_1-y_2=0 \Rightarrow y_1=y_2$ άρα $y\in ext(P)$

($\Longrightarrow$) Αντίστροφα, αν το U δεν παράγει τον $\mathbb{R}^n$, τότε μπορώ να βρω $z\neq 0 : \langle z,u_i\rangle = 0 \ \forall u_i\in U$

Θεωρώ τα $y_1=y+\varepsilon z$ και $y_2=y-\varepsilon z$. Τότε $z\neq 0 \Rightarrow y_1\neq y_2$ και $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

Αρκεί νδο $y_1,y_2\in P$. Αν $i\in I(y)$ τότε $\langle y_1,u_i\rangle = \langle y+\varepsilon z,u_i\rangle = \langle y,u_i\rangle = a_i$
Ομοίως για y_2

Αν $i\notin I(y)$ τότε $\langle y_1,u_i\rangle = \langle y,u_i\rangle + \varepsilon\langle z,u_i\rangle < a_i$

$\langle y_2,u_i\rangle = \langle y_2,u_i\rangle - \varepsilon\langle z,u_i\rangle < a_i$

επιλέγοντας κατάλληλο ε

Άρα $y\notin ext(P)$

Θεώρημα (Weyl-Minkowski)

Κάθε φραγμένο πολύεδρο είναι πολύτοπο

Απόδειξη

Έστω $P=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x, u_i\rangle \leq a_i,\ i=1,..,m\}$ φραγμένο και κλειστό άρα συμπαγές

Το P συμπαγές και κυρτό και άρα από Θ. Minkowski $P=\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(P))$

Για την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι ext(P) είναι πεπερασμένα

Το Λήμμα λέει ότι κάθε $y\in \mathrm{ext}(P)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος

$\langle y, u_i\rangle = a_i,\ i\in I(y)$

Άρα σε κάθε $y\in\mathrm{ext}(P)$ μπορώ να αντιστοιχίσω μια n-άδα

$u_{i_1}(y), \ldots, u_{i_n}(y)$ που να παράγει τον $\mathbb{R}^n$ και η απεικόνιση

$y \longmapsto (u_{i_1}(y), \ldots, u_{i_n}(y))$ είναι 1-1. Άρα $\#\mathrm{ext}(P) \leq \binom{m}{n}$, άρα

το σύνολο των ext(P) είναι πεπερασμένο

(Μέρος II)

Κάθε πολύτοπο είναι πολύεδρο

Απόδειξη

Μπορώ να υποθέσω ότι $\mathrm{int}(P)\neq\emptyset$ (Με επαγωγή). Επίσης υποθέτω ότι $0\in\mathrm{int}(P)$

(μετά από κάποιας μεταφοράς)

Έστω $P=\mathrm{conv}\{x_1,..,x_m\}$. Τότε $P^\circ = \{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,y\rangle \leq 1\ \forall y\in P\}$

$= \{x\in\mathbb{R}^n : \langle x, x_i\rangle \leq 1\ \forall i=1,..,m\}$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρώ ότι αν $x : \langle x, x_i\rangle \leq 1\ \forall i=1,..,m$

τότε αν $y\in P=\mathrm{conv}\{x_1,..,x_m\}$, $y=\sum \lambda_i x_i$ άρα $\langle x,y\rangle = \sum \lambda_i \langle x, x_i \leq \sum\lambda_i = 1$

οπότε $x\in P^\circ$

Άρα το P° είναι πολύεδρο (φραγμένο)

και άρα από το Μέρος I είναι πολύτοπο, δηλ. $\exists z_1,..,z_s$

$P^\circ = \mathrm{conv}\{z_1,..,z_s\}$ και τότε $P^{\circ\circ} = \{x\in\mathbb{R}^n : \langle x, z_i\rangle \leq 1\ \forall i=1,..,s\}$

$\| P$. άρα P πολύεδρο

Εφαρμογές:

Το πολύεδρο του Birkhoff:

Έστω σ μια μετάθεση $\{1,2,\dots,n\}$. Σε κάθε μετάθεση αντιστοιχεί ένας πίνακας X^{σ} με $x_{ij}=1$ αν $\sigma(j)=i$ και $x_{ij}=0$ αλλιώς

~~π.χ σ=(123) άρα~~

π.χ $\sigma=(123)$ δηλ $\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=1$ τότε $X^{\sigma}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

Έστω DS_n το σύνολο όλων των διπλά στοχαστικών πινάκων δηλ $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1\ \forall j=1,\dots,n$ και $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1\ \forall i=1,\dots,n$ και $x_{ij}\geq 0$

Το σύνολο των διπλά στοχαστικών πινάκων είναι ένα πολύεδρο στον $\mathbb{R}^{n^2}$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι οι πίνακες μεταθέσεων είναι ακραία σημεία

Θεώρημα (Birkhoff - Von Neumann)

Τα ακραία σημεία είναι οι πίνακες μεταθέσεων

Απόδειξη

Με επαγωγή $n=1$ ✓

Θεωρούμε τον $L=\{X=(x_{ij})\in\mathbb{R}^{n^2} : \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1\ \forall j$ και $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1\ \forall i\}$

$\dim(L)=(n-1)^2$

Αν περιορίσουμε στον L τα DS_n προσδιορίζονται μόνο από τις ανισότητες $x_{ij}\geq 0$ $\begin{pmatrix}\boxed{(n-1)\times(n-1)} & \\ & \end{pmatrix}$

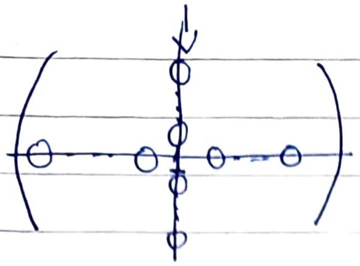
(Τα DS_n είναι πολύεδρα στον L)

Αν πάρω ένα ακραίο σημείο, θα υπάρχουν (από το λήμμα που δείξαμε τουλάχιστον $(n-1)^2$ ζεύγη (i,j) $x_{ij}=0$

Ισχυρισμός 1: Υπάρχει στήλη με μόνο ένα μη-μηδενικό στοιχείο.

~~Απόδειξη~~

Πράγματι, αν κάθε στήλη έχει τουλ. δύο μη-μηδενικά, δηλ. έχει το πολύ $(n-2)$ μηδενικά. Άρα τα μηδενικά θα ήταν το πολύ $n(n-2)<(n-1)^2$ Άτοπο



Αυτό σημαίνει ότι το ακραίο σημείο είναι,

Ξεχνάμε τη σύνδεση με γράφημα και ο πίνακας που μένει είναι DS_{n-1} και είναι ακραίο σημείο, επομένως από επαγωγή έχουμε το ζητούμενο