

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

Παραδώστε τις ασκήσεις: 7.1 (iv, vi), 7.2 (ii)

Άσκηση 7.1 Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς n δείξτε τις παρακάτω ισότητες ή ανισότητες:

(i) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ii) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(iii) $(n+1)(n+2)\dots(2n-1)(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$

(iv) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$ για κάθε $n > 1$

(v) $n! < n^n$ για κάθε $n > 1$

(vi) $\sqrt{n} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$ για $n \geq 2$.

Άσκηση 7.2 Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς n δείξτε ότι:

(i) $3 \mid (n^3 - 10n + 9)$ για κάθε $n \geq 1$

(Εδώ υπάρχει και άλλη απόδειξη χωρίς επαγωγή, μπορείτε να την δείτε;)

(ii) $7 \mid 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ για κάθε $n \geq 0$.

(iii) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \geq 1$.

Άσκηση 7.3 Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται αναδρομικά ως $a_1 = a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ για $n \geq 3$. Δείξτε ότι:

(i) ο όρος a_{3n} είναι άρτιος, για κάθε $n \geq 1$

(ii) ο όρος a_{5n} είναι πολλαπλάσιο του 5, για κάθε $n \geq 1$

(iii) $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, για κάθε $n \geq 1$, όπου $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Άσκηση 7.4 Έχουμε (απεριόριστα) νομίσματα αξίας 3 και αξίας 5. Δείξτε με επαγωγή ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε οποιοδήποτε ακέραιο ποσό αξίας $n \geq 8$ χρησιμοποιώντας τα παραπάνω νομίσματα.

Άσκηση 7.5 Έστω ένας πεπερασμένος παραγόμενος χώρος V και T ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V που τον παράγει. Αποδείξτε ότι κάποιο υποσύνολο του T είναι βάση του V , εφαρμόζοντας την αρχή του ελαχίστου στο σύνολο

$$A = \{|S| : S \subseteq T \text{ και } \text{span}(S) = V\}.$$