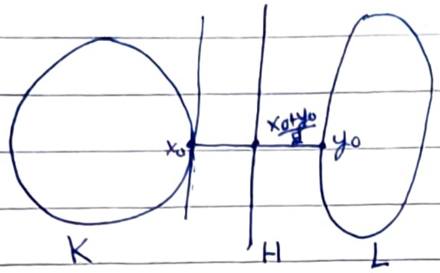
Θεώρημα:
Έστω K, L συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $K\cap L = \emptyset$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο H που διαχωρίζει τα K, L, δηλαδή $K\subset H^+$ και $L\subset H^-$

Απόδειξη



Το $K\times L$ είναι συμπαγές και η $(x,y)\longmapsto \|x-y\|_2$ είναι συνεχής άρα παίρνει ελάχιστη τιμή, έστω στο (x_0,y_0). Παίρνουμε H το υπερεπίπεδο που περνά από το $\frac{x_0+y_0}{2}$ και είναι κάθετο στο $[x_0,y_0]$

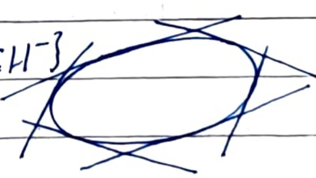
27/03/2025

Διαχωριστικά θεωρήματα:

α) Έστω A, B μη-κενά, κυρτά $\subseteq \mathbb{R}^n$ με $A\cap B=\emptyset$. Τότε τα A, B διαχωρίζονται
β) Αν επιπλέον, A συμπαγές, B κλειστό, τότε τα A και B διαχωρίζονται γνήσια
(περιέχονται στον ανοιχτό ημίχωρο)

Εφαρμογές διαχωριστικών θεωρημάτων
~~Πρόταση~~ Εφαρμογή 1
Έστω $K\subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό. Τότε το K είναι η τομή όλων των ημιχώρων που το περιέχουν, δηλ $K=\bigcap\{H^-: H \text{ υπερ στήριξης του } K \text{ και } K\subseteq H^-\}$

Απόδειξη



Ονομάζω $L=\bigcap\{H^-: H \text{ υπερ. στήριξης του } K \text{ και } K\subseteq H^-\}$
τότε $K\subseteq L$
Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $x\notin K$
Τότε μπορώ να διαχωρίσω το x από το K με υπερεπίπεδο H, ώστε $x\in H^+$
και άρα $x\notin L$. Άρα x τυχόν $K^c\subseteq L^c \Rightarrow L\subseteq K$ οπότε $K=L$

Εφαρμογή 2 (Το λήμμα του Farkas)

Έστω A $d\times n$ πίνακας. Ακριβώς ένα από τα ακόλουθα ισχύει:

a) Η εξίσωση $Ax=0$ έχει μη-αρνητική λύση (δηλ $\exists x : Ax=0$ και οι συντ του x να είναι μη-αρνητικές και όχι όλες μηδέν

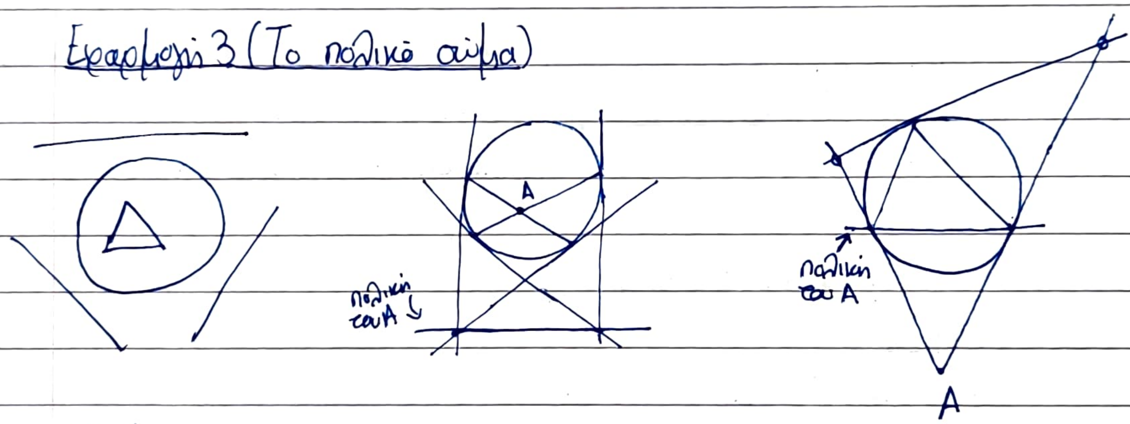
β) Υπάρχει $y\in\mathbb{R}^d$ ώστε το διάνυσμα y^TA έχει όλες τις συντεταγμένες αρνητικές

Απόδειξη

Έστω $v_1,\dots,v_n$ οι στήλες του A. Τότε

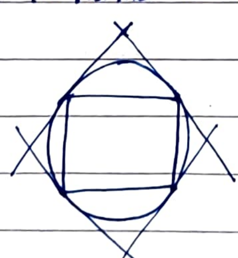
- Αν $0\in \mathrm{conv}\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, τότε $0=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n = A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}$, τότε ισχύει το a)
- Αν $0\notin \mathrm{conv}\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, τότε διαχωρίζουμε με υπερεπίπεδο το 0 από την κυρτή θήκη, δηλ $\exists u$ ώστε $\langle u,v_j\rangle < \langle u,0\rangle = 0$ και παίρνω $y=u$ και ικανοποιείται το β)

Εφαρμογή 3 (Το πολικό σώμα)



Ορισμός

Έστω $C\subseteq\mathbb{R}^n$ μη κενό. Το πολικό του C ορίζεται ως $C^\circ=\{y\in\mathbb{R}^n : \langle x,y\rangle \le 1 \ \forall x\in C\}$

π.χ για το τετράγωνο  ο ρόμβος

Αν C συμμετρικό ως προς το 0, κυρτό

θδο $\frac{c}{n} \le |C|^{1/n}|C^\circ|^{1/n} \le |B_2^n|^{2/n}$

ανοιχτό πρόβλημα για $n=2,3$ το τετράγωνο και ο κύβος

Bourgain-Milman   Santalo

Ιδιότητες:

Το C° είναι:

α) μη-κενό αφού $0\in C^\circ$

β) κυρτό, αφού αν $x,y\in C^\circ$, τότε $\lambda x+(1-\lambda)y\in C^\circ$, αφού

$\langle \lambda x+(1-\lambda)y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle+(1-\lambda)\langle y,z\rangle \le \lambda+(1-\lambda)=1\ \forall z\in C$

γ) είναι κλειστό γιατί αν $y_n\in C^\circ$ με $y_n\to y$ τότε $\langle x,y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$ άρα $y\in C^\circ$

δ) Περιέχει μπάλα ~~φραγμένο~~ αν ~~...~~ το C είναι φραγμένο

Πράγματι αν $\|x\|_2\le M\ \forall x\in C$, τότε αν $y: \|y\|_2\le \frac{1}{M}$

τότε $\langle x,y\rangle \le \|x\|_2\|y\|_2 \le M\cdot\frac{1}{M}=1$ άρα $y\in C^\circ$, δηλ $B(0,\frac{1}{M})\subseteq C^\circ$

$C\subseteq B(0,M) \Rightarrow B(0,\frac{1}{M})\subseteq C^\circ$. Επίσης αν το C περιέχει μπάλα με κέντρο το 0, το C° είναι φραγμένο

Θεώρημα:

Έστω $C\subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό. Τότε $C^{\circ\circ}=\overline{\text{conv}}(C\cup\{0\})$

Απόδειξη

Από τον ορισμό έχουμε ότι $C^{\circ\circ}\supseteq C$

επιπλέον το $C^{\circ\circ}$ περιέχει το 0, και είναι κλειστό και κυρτό

Δηλ $C^{\circ\circ}\supseteq C\cup\{0\} \Rightarrow C^{\circ\circ}$ κυρτό και κλειστό $C^{\circ\circ}\supseteq \overline{\text{conv}}(C\cup\{0\})$

Για τον άλλο εγκλεισμό, έστω $x\in C^{\circ\circ}$, αλλά $x\notin \overline{\text{conv}}(C\cup\{0\})$

Επομένως μπορώ να διαχωρίσω το x από το $\overline{\text{conv}}(C\cup\{0\})$, δηλ $\exists z$

$\langle z,x\rangle \ge a$ και $\langle z,y\rangle \le a\ \forall y\in \overline{\text{conv}}(C\cup\{0\})$

~~όμως~~ για $\langle z,0\rangle < a \Rightarrow a$

$\Rightarrow \langle \frac{z}{a},y\rangle < 1\ \forall y\in C \Rightarrow \frac{z}{a}\in C^\circ$

Τότε δεν γίνεται $\langle z,x\rangle \ge a$ Άτοπο

Πόρισμα

Αν C κλειστό, κυρτό και $0\in int(C)$ τότε $C^{\circ\circ}=C$

Εφαρμογή 4

Αν $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ μη-κενά, κυρτά και συμπαγή, τότε $K_1 \subseteq K_2 \iff h_{K_1} \le h_{K_2}$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Αν $K_1 \subseteq K_2$ τότε $h_{K_1}(y) = \max\limits_{x \in K_1} \langle x, y \rangle \le \max\limits_{x \in K_2} \langle x, y \rangle = h_{K_2}(y)$

($\Leftarrow$) Έστω $h_{K_1} \le h_{K_2}$, και ότι υπάρχει $x \in K_1$, αλλά $x \notin K_2$

Τότε διαχωρίζουμε το x από το K_2, δηλαδή υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$

ώστε $\langle z, y \rangle < \langle x, y \rangle \quad \forall z \in K_2$

Παίρνω max ως προς $z \in K_2$, άρα $\max\limits_{z \in K_2} \langle z, y \rangle < \langle x, y \rangle \Rightarrow h_{K_2}(y) < h_{K_1}(y)$

Άτοπο