Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1 *Έστω* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *τέτοιοι ώστε* $b^2 - 4ac < 0$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *τέτοιο ώστε*

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqslant \frac{2}{\pi}\sqrt{4ac - b^2}.$$

Άσκηση 2 *Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς* x *και* y *υπάρχουν δύο ακέραιοι* a *και* b*, με* $(a, b) \neq (0, 0)$*, με* $|a|, |b| \leqslant 18$ *και*

$$|a \sin\ x + b \cos\ y| < \frac{1}{9}.$$

Άσκηση 3 *Έστω* m *ένας θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο* K *στο* $\mathbb{R}^d$ *με όγκο που ικανοποιεί* $|K| > m \cdot 2^n$ *περιέχει τουλάχιστον* m *διακεκριμένα μη μηδενικά σημεία από το* $\mathbb{Z}^n$.

Άσκηση 4 *Έστω* m *ένας θετικός ακέραιος και* K *στο* $\mathbb{R}^d$ *ένα ανοικτό και φραγμένο συμμετρικό (ως προς το* 0*) κυρτό σύνολο με όγκο* $|K| > m \cdot 2^n$. *Να αποδείξετε ότι το* K *περιέχει τουλάχιστον* m *ζευγάρια ακεραίων σημείων* $\pm u_j \neq 0$.

Άσκηση 5 *α) Έστω* $\alpha \in (0, 1)$ *αρρητός. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι ακέραιοι* m, n *τέτοιοι ώστε*

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\epsilon > 0$*, υπάρχουν άπειρα ζεύγη ακεραίων* p, q *ώστε*

$$\left|p - \sqrt{2}q + \frac{1}{4}\right| < \frac{\epsilon}{6\pi}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι

$$\limsup_{x\to\infty}\left(\cos x + \sin\left(\sqrt{2}x\right)\right) = 2.$$

Άσκηση 6 *Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά* $c > 0$ *με την ιδιότητα· αν* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$*, υπάρχει* $q \in \mathbb{N}$ *οσοδήποτε μεγάλος, και* $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$ *ώστε*

$$\left|a_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqslant \frac{c}{q^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Άσκηση 7 *Έστω* $A = [a_{ij}]$ *ένας πίνακας* $d \times d$ *με* $\det A = 1$. *Έστω* $b_1, \dots, b_d$ *θετικοί αριθμοί με* $\prod_{i=1}^d b_i = 1$. *Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενική ακέραια λύση* x *για το σύστημα ανισοτήτων*

$$\left|\sum_{j=1}^{d} a_{ij}x_j\right| \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Παράδοση μέχρι 08–04–2025.