

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Παραδώστε τις ασκήσεις: 6.2, 6.3, 6.6

Άσκηση 6.1 Έστω ότι η πρόταση $P \Rightarrow Q$ είναι ψευδής. Τότε βρείτε την τιμή αληθείας των προτάσεων

$$P \wedge Q, P \vee Q, Q \Rightarrow P.$$

Άσκηση 6.2 Γνωρίζετε ότι η πρόταση “Αν βρέχει τότε παίρνω την ομπρέλα” είναι αληθής. Τι μπορείτε να συμπεράνετε σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (i) αν βρέχει,
- (ii) αν δεν βρέχει,
- (iii) αν έχω πάρει ομπρέλα,
- (iv) αν δεν έχω πάρει ομπρέλα.

Άσκηση 6.3 Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω ζεύγη προτάσεων αντιστοιχούν σε λογικά ισοδύναμες προτάσεις.

- (i) $P \Rightarrow Q$ και $\neg P \Rightarrow \neg Q$
- (ii) $P \Rightarrow Q$ και $\neg Q \Rightarrow \neg P$
- (iii) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ και $P \Rightarrow Q$
- (iv) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ και $(P \vee Q) \Rightarrow R$

Άσκηση 6.4 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες.

- (i) $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow P)$
- (ii) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
- (iii) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
- (iv) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Άσκηση 6.5 Τρεις ύποπτοι Α, Β, Γ δίνουν τις εξής καταθέσεις:

Ο Α λέει: ο Β είναι ένοχος και ο Γ είναι αθώος

Ο Β λέει: αν ο Α είναι ένοχος τότε και ο Γ είναι ένοχος

Ο Γ λέει: είμαι αθώος και τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους είναι ένοχος

Συμβολίζουμε με p, q, r τις προτάσεις: p : «ο Α είναι αθώος» q : «ο Β είναι αθώος» r : «ο Γ είναι αθώος»

- (i) Γραψτε τις τρεις καταθέσεις σε μορφή προτάσεων λογικής.
- (ii) Μπορούν και οι τρεις καταθέσεις να είναι αληθείς; Αν ναι, τότε ποιός είναι αθώος και ποιός ένοχος;
- (iii) Αν και οι τρεις είναι αθώοι, ποιός έδωσε ψευδή κατάθεση;
- (iv) Αν ο αθώος λέει αλήθεια και ο ένοχος ψέματα, τότε ποιός λέει αλήθεια και ποιός ψέματα;

Άσκηση 6.6 Γράψτε την άρνηση κάθε μιας από τις ακόλουθες προτάσεις:

- (i) $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$
- (ii) $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))$
- (iii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} P(x, \delta) \Rightarrow Q(f(x), \varepsilon)$

Άσκηση 6.7 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες, όπως στα ήδη συμπληρωμένα παραδείγματα. Για την τρίτη στήλη του πίνακα, να βρείτε αν η πρόταση αληθεύει ή όχι.

	$P(x, y)$: ο x θαυμάζει τον y	$P(x, y) : x \leq y$ για $x, y \in \mathbb{R}$
$\forall x \exists y P(x, y)$	όλοι θαυμάζουν κάποιον	κάθε πραγματικός αριθμός έχει κάποιον μεγαλύτερο ή ίσο του (Αληθής)
$\forall x \exists y P(y, x)$		
$\forall x \forall y P(x, y)$		
$\exists x \forall y P(x, y)$		
$\exists x \forall y P(y, x)$		