18/03/2025

Σκοπός: Να βρω ελλειψοειδές με μεγάλο όγκο, χωρίς ακέραια σημεία (πλην το 0)

Λήμμα (Bang):

Έστω $\underbrace{u_1,\dots,u_m}_{\in S^{n-1}}, \underbrace{w_1,\dots,w_m}_{>0}$. Τότε $\exists\, \varepsilon_i \in \{-1,1\}$ ώστε για το $u=\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i u_i w_i$ να ισχύει $|\langle u,u_i\rangle| \geq w_i \ \forall i=1,\dots,m$

Αναζητάμε ελλειψοειδές της μορφής $E=\{x\in\mathbb{R}^n: \langle x,u\rangle^2+\|x\|_2^2 \leq R^2\}$ για $u\in\mathbb{R}^n, R>0$
χωρίς ακέραιο σημείο

Θέλουμε για κάθε $z\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ να ισχύει $\langle z,u\rangle^2+\|z\|_2^2 \geq R^2$ (1)

Προφανώς αν $\|z\|_2\geq R$ η ανισότητα ικανοποιείται, άρα υποθέτω ότι $0<\|z\|_2\leq R$

Τα σημεία με αυτή την ιδιότητα είναι πεπερασμένα $z_1,\dots,z_m,-z_1,-z_2,\dots,-z_m$

$$(1) \Leftrightarrow \left|\left\langle \frac{z}{\|z\|_2},u\right\rangle\right| \geq \sqrt{\left(\frac{R}{\|z\|_2}\right)^2-1} \quad (*)$$

Από το λήμμα, για τα $z_1,\dots,z_m$ έχω ότι υπάρχουν πρόσημα $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ για $w_i=\sqrt{\left(\frac{R}{\|z_i\|_2}\right)^2-1}$ ώστε το $u=\sum_{i=1}^{m} z_i\varepsilon_i w_i$ να ισχύει η (*)

Τότε η (*) ικανοποιείται και για το διάνυσμα $u'=\sum_{\substack{0<\|z\|\leq R\\ z\in\mathbb{Z}^n}} \frac{1}{2} z\varepsilon_z w_z$
(στα αρνητικά έχω βάλει το αντίθετο πρόσημο)

Μένει να εκτιμήσουμε τον όγκο του ελλειψοειδούς

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το $\|u'\|_2$. Αν θ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση u', τότε $\|u'\|_2=\langle u',\theta\rangle = \frac{1}{2}\sum_z \varepsilon_z \frac{\langle z,\theta\rangle}{\|z\|_2} w_z$

$$\Rightarrow \|u'\|_2 = \frac{1}{2}\sum_z \varepsilon_z\frac{\langle z,\theta\rangle}{\|z\|_2}\sqrt{\left(\frac{R}{\|z\|_2}\right)^2-1} \leq \frac{1}{2}\sum_z \frac{|\langle z,\theta\rangle|}{\|z\|_2}\sqrt{\left(\frac{R}{\|z\|_2}\right)^2-1}$$

$$\overset{\frac{z}{R}=v}{\Rightarrow} \|u'\|_2 = \frac{1}{2}\sum_v \frac{|\langle v,\theta\rangle|}{\|v\|_2}\sqrt{\left(\frac{1}{\|v\|_2}\right)^2-1}$$ αυτό είναι ένα άθροισμα Riemann

Εφόσον το τελευταίο είναι ένα άθροισμα Riemann αρκεί να υπολογίσω

$$\frac{1}{2}\int_{B_2^n} \frac{|\langle v,\theta\rangle|}{\|v\|_2}\sqrt{\frac{1}{\|v\|_2^2}-1}\;dv$$

Υπενθύμιση: πολικές συντεταγμένες $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty\int_{S^{n-1}} f(r\theta)\, r^{n-1}\, d\theta\, dr$ ← μέτρο Lebesgue

$$= \underset{|B_2^n|}{n\omega_n} \int_0^\infty\int_{S^{n-1}} f(r\theta)\, d\sigma(\theta)\, dr$$

↖ μέτρο στη σφαίρα που ορίσαμε

οπότε παίρνουμε

$$\frac{1}{2} n\omega_n \int_{S^{n-1}}\int_0^1 \frac{|\langle\varphi,\theta\rangle|}{r}\sqrt{\frac{1}{r^2}-1}\; r^{n-1}\, dr\, d\sigma(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2} n\omega_n \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{r^2}-1}\; r^{n-2}\, dr \int_{S^{n-1}} |\langle\varphi,\theta\rangle|\, d\sigma(\varphi)$$

Επειδή το σ είναι αναλλοίωτο ως προς τις στροφές, μπορώ να διαλέξω την στροφή που στέλνει το θ στο e_1 (γιατί $\langle T\varphi,\theta\rangle = \langle\varphi, T^*\theta\rangle$

οπότε $\int_{S^{n-1}} |\langle\varphi,\theta\rangle|\, d\sigma(\varphi) = \int_{S^{n-1}} |\varphi_1|\, d\sigma(\varphi)$

$$\int_{B_2^n} |z_1|\,dz = \int_{B_2^n} |\langle z,e_1\rangle|\,dz = n\omega_n \int_0^1\int_{S^{n-1}} r^n |\langle\varphi,e_1\rangle|\, dr\, d\sigma(\varphi) = \frac{n\omega_n}{n+1}\int_{S^{n-1}} |\langle\varphi,e_1\rangle|\, d\sigma(\varphi)$$

$$\int_{B_2^n} |z_1|\,dz = \int_{-1}^1 |t|\,\omega_{n-1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-1} dt = 2\omega_{n-1}\int_0^1 t\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-1} dt = 2\omega_{n-1}\int_0^1 t\,(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt$$

Τελικά: $\int_{S^{n-1}} |\langle\varphi,\theta\rangle|\, d\sigma(\varphi) = \frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n}\quad \forall\,\theta\in S^{n-1}$

Μένει να υπολογίσουμε το $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{r^2}-1}\; r^{n-2}\, dr$

Συνάρτηση $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Θέτουμε $S(r) = \frac{1}{2} \sum_{v} \frac{|\langle v, \theta \rangle|}{\|v\|_2} \sqrt{\left(\frac{1}{\|v\|_2}\right)^2 - 1}$

$\lim_{R \to +\infty} \underbrace{\frac{S(R)}{R^n}}_{\text{άθροισμα Riemann}} = \frac{\omega_n}{2(n-1)} \Rightarrow \frac{\omega_n R^n}{S(R)} > 2(n-1) - \frac{\varepsilon}{2}$ για R αρκετά μεγάλο

Ο όγκος του ελλειψοειδούς είναι ίσος με $|E| = \frac{\omega_n R^n}{\sqrt{1 + S(R)^2}} \sim \frac{\omega_n R^n}{S(R)} \sim 2(n-1)$ K.Ball

δεν έχει βελτιωθεί ιδιαίτερα

γιατί αν $\langle u, x \rangle^2 + \|x\|_2^2 < R^2$ ο συντελεστής του x_1 αν υποθέσουμε ότι το u είναι στη διεύθυνση του e_1 είναι

$$\frac{(1 + S(R)^2)}{R^2} x_1^2 + \frac{x_2^2}{R^2} + \dots < 1$$

$|E| > 2^{\frac{n}{2}} \frac{n+2}{2} \sim 2^{n(0.5 + \dots)}$ Blichfeldt

$\sim 2^{n(0.401 + \dots)}$ το καλύτερο μέχρι τώρα

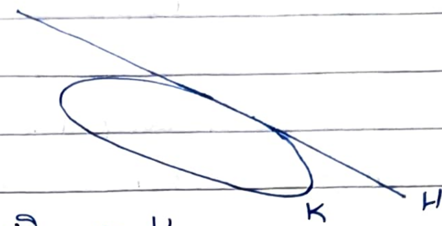
Συνάρτηση στήριξης, Θεωρήματα διαχωρισμού

Ορισμός

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και κυρτό και H ένα υπερεπίπεδο. Θα λέμε ότι το H στηρίζει το K αν:

i) $K \cap H \neq \emptyset$

ii) $K \subseteq H^-$ ή $K \subseteq H^+$



Σε αυτή τη περίπτωση το $K \cap H$ θα το λέμε έδρα του K

Πρόταση:

Οι έδρες των πολυτόπων είναι πολύτοπα

(πολύτοπο: (η τομή ημιχώρων) ~~[illegible]~~ είναι η κυρτή θήκη πεπερασμένου πλήθους σημείων)

Πολύτοπα έχουν διαφόρων διαστάσεων έδρες

0-διάστασης - κορυφές

1-διάστασης πλευρές

n-1-διάστασης τις έδρες του

Αν είναι $f_k(P)$ είναι το πλήθος των k-διάστατων εδρών, τότε

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_k(P) = 1+(-1)^{n+1}$$ Θ Euler

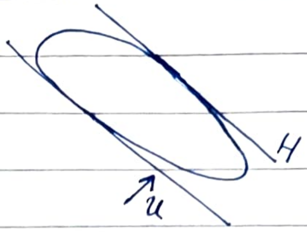
		κορυφές	πλευρές	έδρες
έλεγχος:	B_1^3	6	12	8
	B_∞^3	8	12	6

20/03/2025

Θεώρημα:

Έστω K κυρτό συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$ και έστω $u \in S^{n-1}$. Τότε το K έχει υπερεπίπεδο στήριξης της μορφής $H = \{x : \langle x,u\rangle = b\}$ και $K \subset H^-$

Απόδειξη



Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_u(x) = \langle x,u\rangle$

Αυτή είναι συνεχής στο συμπαγές K και άρα παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο $x_0 \in K$. Δηλαδή

$\langle x,u\rangle \leq \langle x_0,u\rangle := b$ $(*)$

Μένει να δείξω ότι το $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle = b\}$ είναι έδρα του K

Πράγματι $K \cap H \neq \emptyset$ αφού $x_0 \in K \cap H$ και $K \subset H^-$ από την $(*)$

Με βάση το παραπάνω θεώρημα, οδηγούμαστε στον ορισμό της συνάρτησης στήριξης

Ορισμός (συνάρτηση στήριξης)

Έστω K κυρτό και συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$. Η σσ του K ορίζεται ως $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$h_K(x) = \sup_{y \in K} \langle x,y\rangle$ (Μάλιστα είναι max)

Παραδείγματα

i) Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, τότε $h_{\{a\}}(x) = \langle x,a\rangle$

ii) Η συνάρτηση στήριξης της μπάλας B_2^n $h_{B_2^n}(x) = \|x\|_2$, $h_{B_p^n}(x) = \|x\|_q$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Ιδιότητες

i) $h_K(0) = 0$

ii) $h_K(\lambda x) = h_{\lambda K}(x)$ $\forall \lambda \geq 0$

iii) $h_K(x+y) \leq h_K(x) + h_K(y)$

iv) $h_{K+L} = h_K + h_L$ (Αποδ: $h_{K+L}(x) = \sup_{y \in K+L} \langle x,y\rangle = \sup_{\substack{y_1 \in K \\ y_2 \in L}} \langle x, y_1+y_2\rangle = \sup_{y_1 \in K}\langle x,y_1\rangle + \sup_{y_2 \in L}\langle x,y_2\rangle$

$\Rightarrow h_{K+L}(x) = h_K(x) + h_L(x)$)

Ορισμός:

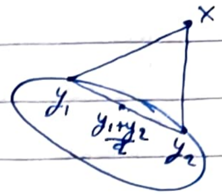
Το πλάτος w_K στη διεύθυνση u δίνεται από την $w_K(u) = h_K(u) + h_K(-u)$

Σχήματα με σταθερό πλάτος στο επίπεδο:

Θεώρημα

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό. Τότε για κάθε x, $\exists\, y \in K$ ώστε $d(x,K) = \|x-y\|_2$, και αν επιπλέον το K είναι κυρτό, τότε το y είναι μοναδικό

Απόδειξη



Έστω ότι υπάρχουν y_1, y_2 ώστε $d(x,K) = \|x-y_1\|_2 = \|x-y_2\|_2$

Άρα K κυρτό $[y_1,y_2] \subseteq K$, ειδικότερα $\frac{y_1+y_2}{2} \in K$

Τότε $\|x-(\frac{y_1+y_2}{2})\|_2^2 = \frac{1}{4}\|x-y_1+x-y_2\|_2^2$

κανόνας παραλληλογράμμου

$$= \frac{1}{4}\left(2\|x-y_1\|_2^2 + 2\|x-y_2\|_2^2 - \|y_2-y_1\|_2^2\right) = d(x,K)^2 - \|y_2-y_1\|_2^2 < d(x,K)^2$$

γιατί $y_1 \neq y_2$

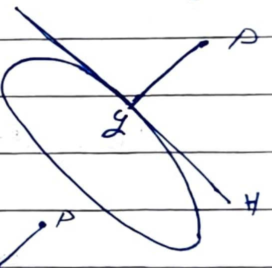
Δηλ. $\|x-(\frac{y_1+y_2}{2})\|_2 < d(x,K)$ Άτοπο

Θεώρημα Διαχωρισμού:

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και κυρτό και $p \in \mathbb{R}^n \setminus K$ και y είναι το πλησιέστερο σημείο του p. ~~Τότε~~ Αν $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x-y, -y+p\rangle = 0\}$, τότε το H ~~είναι~~ στηρίζει το K

Απόδειξη

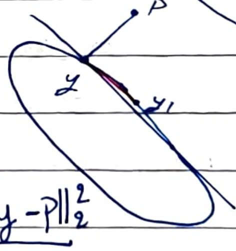
$\uparrow \langle x-y, p-y\rangle = 0$



Επειδή $y \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \neq \emptyset$

Αν $K \nsubseteq H^-$, τότε υπάρχει $y' \in K \cap (\mathbb{R}^n \setminus H^-)$

Τότε $[y, y'] \subseteq K$



$\cancel{\|\varepsilon y+(1-\varepsilon)y'-p\|_2^2 = \|\varepsilon(y-y')+y'-p\|_2^2}$

$$\|\varepsilon y'+(1-\varepsilon)y-p\|_2^2 = \|\varepsilon(y'-y)+y-p\|_2^2 = \varepsilon^2\|y'-y\|_2^2 + \|y-p\|_2^2 + 2\varepsilon\langle y'-y, y-p\rangle$$

Διαλέγω ε ώστε $\varepsilon^2\|y'-y\|_2^2 + 2\varepsilon\langle y'-y, y-p\rangle < 0 \iff \varepsilon\|y'-y\|_2^2 < 2\langle y-y', p-y\rangle$

$$\iff \varepsilon < \frac{2\langle y-y', p-y\rangle}{\|y'-y\|_2^2} > 0$$

και τότε $\|\varepsilon y'+(1-\varepsilon)y-p\|_2 \leq \|y-p\|_2$

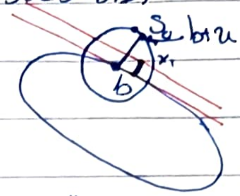
Θεώρημα

Έστω $K\subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και κυρτό και έστω $b\in \overset{\text{σύνορο}}{bd(K)}$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης να περνάει από το b

Απόδειξη

Με κέντρο το b, διαγράφω μοναδιαία μπάλα $B(b,1)$

Παίρνω το σημείο $s_0\in S(b,1)=\{x: \|x-b\|_2=1\}$ το οποίο $s_0\in S(b,1)$ και έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το K



Βασικός ισχυρισμός: $d(s_0,K)=1$

Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω $\varepsilon>0$ και παίρνω $x_1\notin K$ με $\|x_1-b\|_2<\varepsilon$

Από το προηγούμενο, μπορώ να διαχωρίσω x_1 από το K με ένα υπερεπίπεδο

Βρίσκω παράλληλο υπερεπίπεδο σε αυτό να περιέχει το x_1

Ας πούμε ότι $H=\{x: \langle x-x_1,u\rangle=0\}$ για κάποιο $u\in S^{n-1}$

Για κάθε $\underset{x\in H^-}{x\in K}$ εκτελώ την $\|b+u-x\|_2 \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\geq} \langle b+u-x,u\rangle = \langle b,u\rangle+1-\langle x,u\rangle$

$\geq \langle b,u\rangle+1-\langle x_1,u\rangle$ γιατί $\langle x-x_1,u\rangle\leq 0$

$= 1-\langle b-x_1,u\rangle \overset{C-S}{\geq} 1-\|b-x_1\|_2\|u\|_2 > 1-\varepsilon$

Αυτό σημαίνει ότι $d(\overset{\in S(b,1)}{b+u},K)>1-\varepsilon$. Επομένως $d(s_0,K)>1-\varepsilon$

Άρα ισχύει $\forall \varepsilon>0$, $d(s_0,K)\geq 1^{(*)}$. Όμως $\forall s\in S(b,1)$ $d(s,K)\leq \|s-b\|_2=1\,(**)$

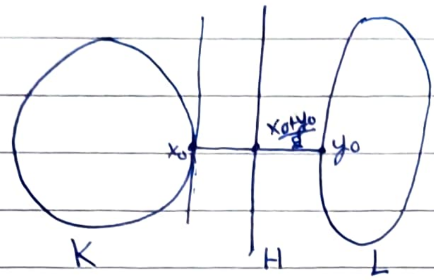
Από $(*)$, $(**)$ $d(s_0,K)=1$

Ολοκλήρωση της απόδειξης: Από τον ισχυρισμό το πλησιέστερο σημείο του K σε s_0 είναι το b και από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει υπερεπίπεδο να περνάει από το b και στηρίζει το K

Θεώρημα:

Έστω K, L συμπαγή και κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $K \cap L \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει υπερεπίπεδο H που διαχωρίζει τα K, L. Δηλαδή $K \subset H^+$ και $L \subset H^-$

Απόδειξη



Το $K \times L$ είναι συμπαγές και η $(x,y) \longmapsto \|x-y\|_2$ είναι συνεχής άρα παίρνει ελάχιστη τιμή, έστω στο (x_0, y_0). Παίρνουμε H το υπερεπίπεδο που περνά από το $\frac{x_0+y_0}{2}$ και είναι κάθετο στο $[x_0, y_0]$