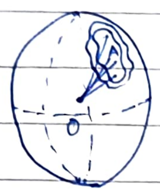
04/03/2025

Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα

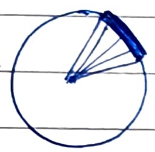
Μέτρο στη σφαίρα



Ορίζω ένα μέτρο στη σφαίρα: $\sigma(A) = \dfrac{|\tilde{A}|}{|B_2^n|}$

όπου $\tilde{A} = \{ta : a \in S^{n-1} \text{ και } t \in [0,\pi]\}$

$n=2$



Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σ είναι μέτρο Lebesgue στη σφαίρα

Θα γράφουμε $A_t = \{x \in S^{n-1} : d(x,A) \leq t\} = (A + tB_2^n) \cap S^{n-1}$

Ισοπεριμετρική ανισότητα

Από όλα τα $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ την μικρότερη t-επέκταση την έχει η γεωδαισιακή μπάλα. Δηλαδή $\sigma(A_t) \geq \sigma(B(x,\varepsilon)_t)$
όπου $B(x,\varepsilon)$ γεωδαισιακή μπάλα με $\sigma(B(x,\varepsilon)) = \frac{1}{2}$

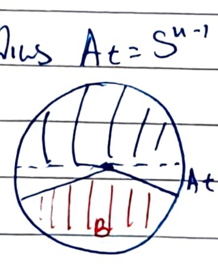
Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε ότι $\sigma(B(x,\varepsilon)_t) = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, e^{-\frac{t^2 n}{2}}$

Θεώρημα:
Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) \geq \frac{1}{2}$. Τότε $\sigma(A_t) \geq 1 - 2e^{-\frac{t^2 n}{4}}$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι αρκεί να κοιτάξουμε $t<2$, αλλιώς $A_t = S^{n-1}$

Έστω $B = S^{n-1} \setminus A_t$



Τότε αν $x \in A$, $y \in B$ είτε $\|x-y\|_2 \geq t$

Οπότε από κανόνα του παραλληλογράμμου

$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 = 4$

$\Rightarrow \|x+y\|_2^2 \leq 4 - t^2$

Ορίζουμε

Ορίζω τα $\tilde{A}, \tilde{B}$ όπως πριν. Αν $\tilde{x} \in \tilde{A}$ και $\tilde{y} \in \tilde{B}$ τότε υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $\tilde{x} = ax, \tilde{y} = by$, $a, b \in [0,1]$

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_2 = \|ax + by\|_2 = b\|\tfrac{a}{b}x + y\|_2 = b\|\tfrac{a}{b}(x+y) + y(1-\tfrac{a}{b})\|_2 \leq \tfrac{a}{b}\|x+y\|_2 + \|y\|_2(1-\tfrac{a}{b})$$

$\Rightarrow \|\tilde{x}+\tilde{y}\|_2 \leq \frac{a}{b}\sqrt{4-t^2} + 1(1-\frac{a}{b})$ χρησιμοποιούμε ότι $\sqrt{4-t^2} \leq 4 - \frac{t^2}{2}$ και $1 \leq 4 - \frac{t^2}{2}$

και παίρνουμε $\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_2 \leq 4 - \frac{t^2}{2}$

$$\Rightarrow \tilde{A}+\tilde{B} \subseteq (4-\tfrac{t^2}{2})B_2^n \Rightarrow |(4-\tfrac{t^2}{2})B_2^n| \geq |\tilde{A}+\tilde{B}| \overset{B-M}{\geq} (|\tilde{A}|^{\frac{1}{n}} + |\tilde{B}|^{\frac{1}{n}})^n$$

Από ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου $\geq (2\sqrt{|\tilde{A}|^{\frac{1}{n}}|\tilde{B}|^{\frac{1}{n}}})^n$

Άρα $|(4-\frac{t^2}{2})B_2^n| \geq 2^n\sqrt{|\tilde{A}||\tilde{B}|} = 2^n|B_2^n|\sqrt{\sigma(A)\sigma(B)}$

$$e^{-\frac{t^2 n}{8}} \geq (1-\tfrac{t^2}{8})^n \geq \sqrt{\sigma(A)\sigma(B)} \geq \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\sigma(A_t))}$$

$\Rightarrow \dots \sigma(A_t) \geq 1 - 2e^{-\frac{t^2 n}{4}}$

Εφαρμογή: ~~Lipschitz~~

Οι Lipshitz συναρτήσεις στη σφαίρα είναι "σταθερές"

Έστω $f: S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)-f(y)| \leq d(x,y)$. Τότε $\forall t>0$, υπάρχει ένας αριθμός L_f ώστε $\sigma(x \in S^{n-1} : |f(x) - L_f| \geq t) \leq 2e^{-ct^2/n}$

Απόδειξη

Εδώ μπορώ να πάρω $L_f = med(f)$, δηλ. ο αριθμός M ώστε $\sigma(x \in S^{n-1}: f(x) \geq M) \geq \frac{1}{2}$ και $\sigma(x \in S^{n-1}: f(x) \leq M) \geq \frac{1}{2}$

~~Έστω $x \in A_t$~~

Έστω $x \in A_t$ όπου $A = \{x \in S^{n-1}: f(x) \geq M\}$ και $B = \{x \in S^{n-1}: f(x) \leq M\}$

και τότε μπορώ να βρω $y \in A$ με $d(x,y) \leq t$ και τότε:

$f(x) = f(x) - f(y) + f(y) \geq -d(x,y) + M \geq -t + M \Rightarrow f(x) - M \geq -t$

Αν $x\in B_t$ τότε $\exists y\in B$ $d(x,y)\le t$

$f(x) = f(x)-f(y)+f(y) \le d(x,y)+M \le t+M \Rightarrow f(x)-M\le t$

Οπότε $\{x : |f(x)-M|>t\} \subseteq (A_t\cap B_t)^c$

και άρα $\sigma(x\in S^{n-1} : |f(x)-M|>t) \le \sigma((A_t\cap B_t)^c) \le \sigma(A_t^c)+\sigma(B_t^c)$
$\overset{\text{θεωρ}}{\le} 2e^{-\frac{t^2 n}{4}} + 2e^{-\frac{t^2 n}{4}} = 4e^{-\frac{t^2 n}{4}}$

Ισοπεριμετρική ανισότητα για το μέτρο Gauss

Ορίζουμε το μέτρο Gauss ως $\gamma_n(A)=\int_A \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}dx = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_A e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}dx$

Από όλα τα $A\subseteq\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A)=\alpha$, για ποιο ελαχιστοποιείται το $\gamma_n(A_t)$;
όπου $A\subseteq\mathbb{R}^n$ και $A_t = A+tB_2^n$ Για κάποιο ημίχωρο

Ειδικότερα, αν $\gamma_n(A)\ge\frac{1}{2}$, τότε $\gamma_n(A_t)\ge 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}$

Θεώρημα (Maurey)
Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$ μη κενό Borel. Τότε $\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{d(x,A)^2}{4}}\,d\gamma_n(x) \le \frac{1}{\gamma_n(A)}$
όπου $d(x,A)=\min\{\|x-y\|_2 : y\in A\}$

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Precopa-Leindler
Ορίζω • $f(x)=e^{\frac{d^2(x,A)}{4}}\gamma_n(x)$ όπου γ_n η πυκνότητα του μέτρου
δηλ. $\gamma_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$
• $g(x)=1_A(x)\gamma_n(x)$
• $h(x)=\gamma_n(x)$ και $\lambda=\frac{1}{2}$

Για $y\in A$ $f(x)g(y)=\frac{1}{(2\pi)^n}e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}e^{-\frac{\|y\|_2^2}{2}}e^{\frac{d^2(x,A)}{4}} \le \frac{1}{(2\pi)^n}e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}\cdot e^{-\frac{\|y\|_2^2}{2}}e^{\frac{\|x-y\|_2^2}{4}}$

από κανόνα παραλληλογράμμου: $f(x)g(y)\le\frac{1}{(2\pi)^n}e^{-\frac{\|x+y\|^2}{4}} = h\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

Οπότε $\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} h}_{1} \ge \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\frac{1}{2}}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g}_{\gamma_n(A)}\Big)^{1/2}$ ... προκύπτει το ζητούμενο

Οπότε αν $\gamma_n(A) \geq \frac{1}{2}$ $\quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{d(x,A)^2}{4}} d\gamma_n(x) \leq 2$

όμως $\int_{A_t^c} e^{\frac{d(x,A)^2}{4}} d\gamma_n(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{d(x,A)^2}{4}} d\gamma_n(x)$

όμως $\int_{A_t^c} e^{\frac{d(x,A)^2}{4}} d\gamma_n(x) \geq \int_{A_t^c} e^{\frac{t^2}{4}} d\gamma_n(x) = e^{\frac{t^2}{4}} \gamma_n(A_t^c) \Rightarrow \gamma_n(A_t^c) \leq 2e^{-\frac{t^2}{4}}$

$\Rightarrow \gamma_n(A_t) \geq 1 - 2e^{-\frac{t^2}{4}}$