

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Παραδώστε τις ασκήσεις: 5.2, 5.3

Άσκηση 5.1 Έστω $f : A \rightarrow B$. Δείξτε ότι:

- (i) αν $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$ τότε $f(X_1) \subseteq f(X_2)$
- (ii) αν $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq B$ τότε $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$

Άσκηση 5.2 Έστω συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$.

- (i) Να δείξετε ότι αν f, g είναι 1-1 τότε και $g \circ f$ είναι 1-1.
- (ii) Να δείξετε ότι αν f, g είναι επί τότε και $g \circ f$ είναι επί.

Άσκηση 5.3 Αν $f : X \rightarrow Y$ και $(A_t)_{t \in T}$ οικογένεια υποσυνόλων του X , δείξτε ότι:

- (i) $f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(A_t)$
- (ii) $f\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) \subseteq \bigcap_{t \in T} f(A_t)$
- (iii) Αν η f είναι 1-1 τότε $f\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) = \bigcap_{t \in T} f(A_t)$.
- (iv) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης f και συνόλων A_1, A_2 τέτοιων ώστε $f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Άσκηση 5.4 Μια ακολουθία συνόλων A_n με $n \in \mathbb{N}$ λέγεται φθίνουσα αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $A_{n+1} \subseteq A_n$. Ονομάζεται αύξουσα αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $A_n \subseteq A_{n+1}$.

- (i) Δείξτε οι αν A_n είναι φθίνουσα τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

- (ii) Δείξτε οι αν A_n είναι αύξουσα τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Άσκηση 5.5 Για ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η $\star$ ορίζει διμελή πράξη; Στην περίπτωση που ορίζεται πράξη εξετάστε αν αυτή είναι προσεταιριστική ή μεταθετική.

- (i) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = \frac{a}{b}$,
- (ii) Στο σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με $a \star b = a^b$,
- (iii) Στο σύνολο των μή μηδενικών ακεραίων $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ με $a \star b = a^b$,
- (iv) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = ab + 1$,
- (v) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = |a|b$,
- (vi) Στο σύνολο των μή μηδενικών ακεραίων $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ με $a \star b = 2^{ab}$,
- (vii) Στο σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ με $a \star b = \max(a, b)$.
- (viii) Στο σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ με $a \star b = a + b + a \cdot b$.