Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1 *Να υπολογίσετε τον όγκο της μπάλας του ℓ_1 στον $\mathbb{R}^n$, χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavalieri.*

Άσκηση 2 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, συμμετρικό ως προς το 0. Θεωρούμε $\theta \in S^{n-1}$ και τη συνάρτηση*

$$f_\theta(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Να αποδείξετε ότι

$$f_\theta(0) \geqslant f_\theta(t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, η μέγιστη τομή του K με υπερεπίπεδο κάθετο στο θ είναι εκείνη που περνάει από το κέντρο συμμετρίας του.
Να δώσετε ένα παράδειγμα μη συμμετρικού σώματος, όπου η παραπάνω ανισότητα δεν ισχύει.

Άσκηση 3 *Έστω K και T δύο συμμετρικά (ως προς το 0) κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{1}{2}[K \cap (x + T)] + \frac{1}{2}[K \cap (-x + T)] \subseteq K \cap T$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) *Να αποδείξετε ότι*

$$|K \cap (x + T)| \leqslant |K \cap T|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Άσκηση 4 *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/2}$$

και για κάθε μη κενό Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το μέτρο του Gauss στον $\mathbb{R}^n$

$$\gamma_n(A) := \int_A \gamma_n(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|^2/2} dx.$$

(α) *Να αποδείξετε ότι αν A, B είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε*

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant (\gamma_n(A))^\lambda (\gamma_n(B))^{1-\lambda}.$$

(β) *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες*

$$e^{-\|x\|^2/2} \gamma_n(A) \leqslant \gamma_n(A + x) \leqslant \gamma_n(A).$$

Άσκηση 5 *Αντιστοιχίζουμε σε κάθε πλευρά b ενός κυρτού πολυγώνου P ένα τρίγωνο μέγιστου εμβαδού που έχει την b ως πλευρά του και περιέχεται στο P. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων που αντιστοιχίζονται στις πλευρές του P είναι τουλάχιστον διπλάσιο από το εμβαδόν του P.*

Άσκηση 6 *Λέμε ότι μια συνάρτηση* $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *είναι τοπικά Lipschitz αν η ποσότητα*

$$\|\nabla f(x)\| = \limsup_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}$$

είναι φραγμένη στον $\mathbb{R}^d$*. Αν* f *είναι μια συνάρτηση* C^1*, τότε η* $\|\nabla f(x)\|$ *είναι απλά η Ευκλείδεια νόρμα του* $\nabla f(x)$*. Να αποδείξετε την ανισότητα:*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\|\nabla f(x)\|dx \geqslant \int_{\mathbb{R}} S(A_t)\,dt,$$

όπου $A_t=\{x\in\mathbb{R}^d \mid f(x)>t\}$ *και* $S(A_t)$ *είναι η επιφάνεια του* A_t*.*

Άσκηση 7 *Χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα και την παραπάνω άσκηση, να αποδείξετε ότι για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση* $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *με συμπαγή φορέα, έχουμε*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^{\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leqslant \frac{1}{d|B_d|^{\frac{1}{d}}}\int_{\mathbb{R}^d}\|\nabla f(x)\|dx.$$

Αυτή είναι μια συναρτησιακή εκδοχή της ισοπεριμετρικής ανισότητας.

Παράδοση μέχρι 21–03–2025.