

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Παραδώστε τις ασκήσεις: 4.2, 4.3

Άσκηση 4.1 Έστω $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ και $f : A \rightarrow B$ με $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 3$. Βρείτε τά $f(\{a, b\})$, $f(\{b, c\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{1, 2\})$.

Άσκηση 4.2 Για τις ακόλουθες συναρτήσεις ελέγξτε εάν υπάρχει δεξιό αντίστροφο ή/και αριστερό αντίστροφο, και εάν υπάρχει βρείτε το.

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 2$,

(ii) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = x^2$.

(iii) Βρείτε τα σύνολα $f([-1, 1])$, $f^{-1}([0, 2])$, $g([-3, 2])$ και $g^{-1}([2, 4])$.

Άσκηση 4.3 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x|x|$ είναι 1-1 και επί. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Άσκηση 4.4 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = (x + 1)^2$.

(i) Σχεδιάστε το γράφημα της f .

(ii) Προσδιορίστε τα σύνολα $B = f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([1, 4])$, $f^{-1}(\{-2\})$, $f^{-1}([-2, 0])$.

(iii) Βρείτε δύο διαφορετικά δεξιά αντίστροφα της $f : \mathbb{R} \rightarrow B$.

(iv) Βρείτε δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, A_1 και A_2 , τέτοια ώστε $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$ και $f|_{A_i}$, για $i = 1, 2$, να είναι ένα προς ένα. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ένα αριστερό αντίστροφο της $f|_{A_i} : A_i \rightarrow \mathbb{R}$. (Σημείωση: Ως $f|_{A_i}$ συμβολίζουμε τον περιορισμό της f στο A_i , δηλ. το πεδίο ορισμού της f είναι το υποσύνολο $A_i \subseteq \mathbb{R}$).

Άσκηση 4.5 Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ και υποσύνολα $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$.

(i) Δείξτε ότι $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ και $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

(ii) Δώστε παραδείγματα στα οποία οι παραπάνω εγκλεισμοί είναι γνήσιοι.

(iii) Αν η f είναι ένα προς ένα, δείξτε ότι $X = f^{-1}(f(X))$.

(iv) Αν η f είναι επί, δείξτε ότι $f(f^{-1}(Y)) = Y$.