$$\left(\frac{S(K)}{S(B_2^n)}\right)^{n-1} \geq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}$$

$$\Rightarrow \frac{S(K)^{\frac{1}{n-1}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{S(B_2^n)^{\frac{1}{n-1}}}{|B_2^n|^{\frac{1}{n}}}$$

~~25~~ 25/02/2025

<u>Ισοδιαμετρική ανισότητα</u>

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές και B η ευκλείδεια μπάλα με $diam(A) = diam(B)$

Τότε $|conv(A)| \leq |B|$

<u>Απόδειξη</u>

Το $A-A$ είναι συμμετρικό, αφού αν $x \in A-A$ τότε και $-x \in A-A$

[Μπορώ να υποθέσω ότι $0 \in A$] Μπορώ να υποθέσω ότι A κυρτό (*) [~~Conv~~

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski $|A-A|^{\frac{1}{d}} \geq |A|^{\frac{1}{d}} + |-A|^{\frac{1}{d}} = 2|A|^{\frac{1}{d}}$

$\Rightarrow \left|\frac{A-A}{2}\right|^{\frac{1}{d}} \geq |A|^{\frac{1}{d}}$ (1)

(*) αλλιώς δουλεύω με το $conv(A)$ άρα $diam(conv(A)) = diam(A)$]

<u>Ισχυρισμός</u>: $diam\left(\frac{A-A}{2}\right) = diam(A)$

Έστω $a, a' \in \frac{A-A}{2}$. Τότε $\exists\, a_1, a_2, a_1', a_2' \in A$ $\quad a = \frac{a_1-a_2}{2}$ $\quad a' = \frac{a_1'-a_2'}{2}$

και $\|a-a'\|_2 = \left\| \frac{a_1-a_2}{2} - \frac{a_1'-a_2'}{2} \right\|_2 \le \frac{\|a_1-a_1'\|_2 + \|a_2-a_2'\|_2}{2} \le \frac{2diam(A)}{2} = diam(A)$

και επομένως $diam\left(\frac{A-A}{2}\right) \le diam(A)$

Για την αντίστροφη ανισότητα, αν $diam(A) = \|a_1-a_2\|_2$ (λόγω συμπάγειας) για $a_1, a_2 \in A$ και $diam(A) = \|a_1-a_2\|_2 = \Big\| \underbrace{\frac{a_1-a_2}{2}}_{\in \frac{A-A}{2}} - \underbrace{\frac{a_2-a_1}{2}}_{\in \frac{A-A}{2}} \Big\|_2 \le diam\left(\frac{A-A}{2}\right)$

Λόγω της συμμετρίας του $\frac{A-A}{2}$ έχουμε ότι $\frac{A-A}{2} \subseteq \frac{diam(A)}{2} B_2^d$

$\Rightarrow \frac{A-A}{2} \subseteq B$ για $\frac{diam(A)}{2}$ ακτίνα του B $\quad$ Άρα $\left|\frac{A-A}{2}\right| \le |B|$ (2)

Άρα από (1), (2) $\quad |A| \le |B|$

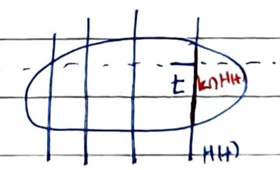
Παρατήρηση: Ισχύει για οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ αφού δεν χρησιμοποιούμε κάποια ιδιότητα της ευκλείδειας

Όγκος της Ευκλείδειας Μπάλας

Θα υπολογίσουμε τον όγκο της B_2^n. Αν B μια μπάλα με ακτίνα r στο $\mathbb{R}^n$ τότε $|B| = r^n |B_2^n|$

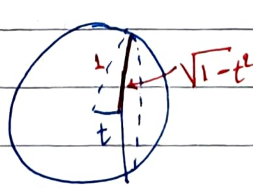
Αρχή του Cavalieri: Γενικά $|K| = \int_{-\infty}^{\infty} |K \cap H(t)|\, dt$ $\quad H(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$

Για την B_2^n, έστω w_n ο όγκος της



$|B_2^n| = \int_{-\infty}^{\infty} |B_2^n \cap H(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} |\sqrt{1-t^2}\, B_2^{n-1}|\, dt$

$\Rightarrow w_n = w_{n-1} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-1} dt = 2 w_{n-1} \int_{0}^{1} \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-1} dt$



και με αντικατάσταση $t = \cos\theta$ $\quad w_n = 2 w_{n-1} \int_0^{1} (\sin\theta)^n dt$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n dt \overset{\text{παραγ.}}{=} \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{n-2} dt = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Τελικά αν n άρτιος τότε $W_n = W_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$

και αν $n = 2k-1$ $W_n = W_{2k-1} = \frac{\pi^{k-1} \cdot 2^{2k-1}(k-1)!}{(2k-1)!}$

<u>Πώς συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά;</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε τον <u>τύπο του Stirling</u>:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n+1)^{-1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{(12n)^{-1}}$$

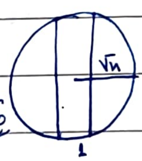
Για μεγάλα n $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

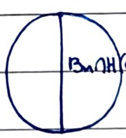
Άρα έχουμε $W_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \sim \frac{\pi^k}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{e}{k}\right)^k \overset{n=2k}{=} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

Αν $r_n B_2^n$ έχει όγκο 1, τότε $|r_n B_2^n| = 1 \Rightarrow r_n^n W_n = 1 \Rightarrow r_n = \frac{1}{W_n^{\frac{1}{n}}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi e}}$

<u>Κατανομή του όγκου</u>: Γράφω $B(n) = r_n B_2^n$

$$|B_n \cap H(0)| = |r_n B_2^{n-1}| = r_n^{n-1} W_{n-1} = \frac{W_{n-1}}{W_n^{\frac{n-1}{n}}} \sim \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \xrightarrow{n\to+\infty} \sqrt{e}$$



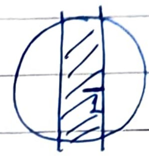


$$|B(n)\cap H(t)| = W_{n-1}(r_n^2 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} = W_{n-1} r_n^{n-1}\left(1-\frac{t^2}{r_n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sim \sqrt{e}\left(1 - \frac{t^2 2\pi e}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Οπότε $\lim_{n\to+\infty}|B(n)\cap H(t)| = \sqrt{e}\, e^{-\pi e t^2}$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν K κυρτό σώμα $|K|=1$, τότε $\lim_{n\to+\infty} |K\cap H(t)| = c_1 e^{-c_2 t^2}$ όπου c_1, c_2 σταθερές



Έστω L_n η λωρίδα πλάτους 2, $L_n = \{x\in\mathbb{R}^n : |x_n|\le 1\}$

Τότε: $|B(n)\cap L_n| \sim \sqrt{e}\int_{-1}^{1} e^{-\pi e t^2} dt$

$$\sqrt{e}\int_{-1}^{1} e^{-\pi e t^2}dt = 2\sqrt{e}\int_0^1 e^{-\pi e t^2}dt = 1 - 2\sqrt{e}\int_1^\infty e^{-\pi e t^2}dt$$

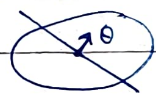
(Χρησιμοποιήσαμε ότι $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

και $\sqrt{e}\int_1^\infty e^{-\pi e t^2} \le \sqrt{e}\int_1^\infty t e^{-\pi e t^2}dt = \frac{\sqrt{e}}{2\pi e} e^{-\pi e}$

Πρόβλημα Busemann-Petty (1956)

Ερώτηση: Έστω K, T συμμετρικά, κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε $\forall \theta\in S^{n-1}$
$|K\cap\theta^\perp| < |T\cap\theta^\perp|$ (*) όπου $\theta^\perp = \{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,\theta\rangle = 0\}$

Ισχύει ότι $|K|<|T|$; για $n=1, n=2$ ισχύει



- Το 1986 (K. Ball) Αν $K(n)$ ο κύβος όγκου 1, τότε $\forall\theta\in S^{n-1}$, ισχύει
$1\le |K(n)\cap\theta^\perp| \le \sqrt{2}$

$$\theta = \left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0, 0, \dots\right)$$

$|B(n)\cap\theta^\perp| > |K(n)\cap\theta^\perp|$ για $n\ge 10$ επειδή $|B(n)\cap\theta^\perp| \longrightarrow \sqrt{e}$

Αλλά $|K(n)| \ge |B(n)|$ αφού $|K(n)|=1$, $|B(n)|=1$

- Άρα το πρόβλημα Busemann-Petty δεν ισχύει για $n\ge 10$ (K.Ball)
- $n\ge 7$ Γιαννόπουλος ~1990
- $n\ge 6$ Παπαδημητράκης ~1991
- Είναι σωστό για $n=2,3,4$ μόνο

Νέα Ερώτηση

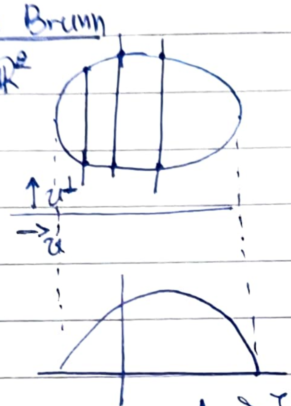
Αν ισχύει η υπόθεση (*) μπορούμε να βρούμε απόλυτη σταθερά $c>0$ ώστε
$|K| \leq c|T|$

Απάντηση: Ναι! Klartag-Lehec (2024)

27/02/2025

Αρχή Brunn

$K \subseteq \mathbb{R}^2$

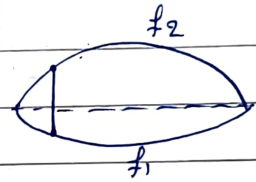


$$f_u(t) = |K \cap (u^\perp + tu)|$$
$$x \in \langle x, u \rangle = t$$

Η $f_u(t)$ είναι κοίλη στο support της

Απόδειξη στο $\mathbb{R}^2$

$u=e_1$ Γράφω $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$

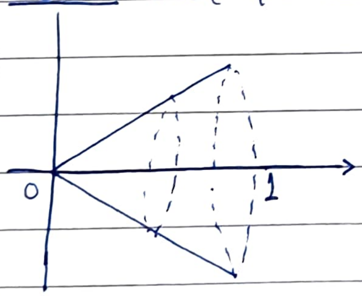


όπου f_1 κυρτή, f_2 κοίλη

και τότε (δηλ. όταν $u=e_1$)

$f_u(x) = \underbrace{f_2(x)}_{\text{κοίλη}} \underbrace{- f_1(x)}_{\text{κοίλη}}$ άρα f_u κοίλη

Στον $\mathbb{R}^3$ Θεωρούμε ένα κώνο



$f_u(t) = \pi t^2 \mathbb{1}_{[0,1]}$ είναι κυρτή

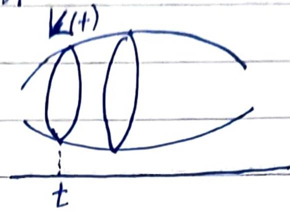
όμως η $f_u(t)^{\frac{1}{2}}$ είναι κοίλη

Θεώρημα (Brunn)

Γενικά, αν $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό, συμπαγές, τότε η συνάρτηση $f_u(t)^{\frac{1}{n-1}} = |K \cap (u^\perp + tu)|^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη

Απόδειξη

Έστω $u=e_n$, Τότε κοιτάζω $f_u(t) := |K\cap\{x_n=t\}|^{\frac{1}{n-1}}$
και ορίζουμε $K(t)=\{x\in\mathbb{R}^{n-1} : (x,t)\in K\}$



Αν t,s είναι στον φορέα (support) της f_u
και $\lambda\in(0,1)$, τότε:
$$K(\lambda t+(1-\lambda)s)\supseteq \lambda K(t)+(1-\lambda)K(s)$$

$$|K(\lambda t+(1-\lambda)s)|^{\frac{1}{n-1}} \geq |\lambda K(t)+(1-\lambda)K(s)|^{\frac{1}{n-1}} \overset{BM}{\geq} \lambda\, |K(t)|^{\frac{1}{n-1}}+(1-\lambda)|K(s)|^{\frac{1}{n-1}}$$

$\Rightarrow f_u(\lambda t+(1-\lambda)s)\geq \lambda f_u(t)+(1-\lambda)f_u(s)$ άρα f_u κοίλη

<u>Σχόλιο</u>

Σε κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα "αντιστοιχεί" μια νόρμα, με την εξής έννοια:
Αν $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε το σύνολο $K=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\leq 1\}$ είναι κυρτό συμμετρικό σώμα

$\|\cdot\|$ νόρμα αν:

i) $\|x\|\geq 0$ και $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$

iii) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

Απόδειξη

<u>Κυρτότητα του K</u> Αν $x,y\in K$, τότε $\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leq \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|\leq\lambda+(1-\lambda)=1$
$\Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\in K$, $0<\lambda<1$ άρα K κυρτό

<u>K συμπαγές</u> Έστω $u=\sum_{i=1}^n t_ie_i\in\mathbb{R}^n$, τότε $\|u\|=\|\sum_{i=1}^n t_ie_i\|\leq\sum_{i=1}^n|t_i|\,\|e_i\|$
$\leq \max\{\|e_i\|\}\sum_{i=1}^n|t_i|$

Cauchy-Schwartz $\Rightarrow$ $\|u\|\leq \underbrace{\max\{\|e_i\|\}\sqrt{n}}_{M}\left(\sum t_i^2\right)^{1/2}\leq M\|u\|_2$

$\Rightarrow$ Αν $x,y\in\mathbb{R}^n$ τότε $|\,\|x\|-\|y\|\,|\leq\|x-y\|\leq M\|x-y\|_2$

Έπεται ότι η $\|\cdot\|$ είναι συνεχής. Άρα η S^{n-1} είναι συμπαγές $\subseteq\mathbb{R}^n$

Η $\|\cdot\|$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ. $\exists\, m,M>0$ ώστε $m\leq\|x\|\leq M$ $\forall x\in S^{n-1}$

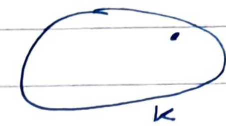
Γενικά αν $x\in\mathbb{R}^n$, τότε $\frac{x}{\|x\|_2}\in S^{n-1}\Rightarrow \underbrace{m\|x\|_2\leq\|x\|}\leq M\|x\|_2$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$

και από την αριστερή ανισότητα $K\subseteq\frac{1}{m}B_2^n$

Αρα K φραγμένο και κλειστό ~~αρα~~ αρα $\|\cdot\|$ συνεχής αρα K συμπαγές

Επίσης $\frac{1}{M}B_2^n \subseteq K$, αρα K έχει μη κενό εσωτερικό

Ισχύει και το αντίστροφο. Αν K συμμετρικό κυρτό σώμα τότε υπάρχει $\|\cdot\|_K$ ώστε $K=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_K \le 1\}$. Αυτή είναι η $\|x\|_K=\min\{\lambda : x\in \lambda K\}$



K

Όμως

Έστω $\|\cdot\|$: νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $K=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\le 1\}$

Τότε ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = |K|\int_0^\infty p\, t^{n+p-1}e^{-t^p}dt$$

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

Ειδικότερα $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|}dx = |K|\underbrace{\int_0^\infty t^n e^{-t}dt}_{\text{συνάρτηση } \Gamma}$ ~~Για~~ $\Gamma(n+1)=n!$

Απόδειξη

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\|x\|}^\infty p\,t^{p-1}e^{-t^p}dt\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty 1_{\{t\ge\|x\|\}}\,p\,t^{p-1}e^{-t^p}dt\,dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_{\mathbb{R}^n} p\,t^{p-1}e^{-t^p}\int_{\mathbb{R}^n}1_{\{\|x\|\le t\}}dx\,dt \overset{*}{=} \int_0^\infty p\,t^{p-1}e^{-t^p}|tK|dt = |K|\int_0 t^{n+p-1}e^{-t^p}dt$$

Πρόταση

Έστω $1\le p<+\infty$ και $B_p^n=\{x\in\mathbb{R}^n : |x_1|^p+\dots+|x_n|^p\le 1\}$

Τότε $|B_p^n| = \dfrac{2\Gamma(\frac{1}{p}+1)^n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}$ ~~Απόδ~~

Απόδειξη

Αν $\|x\|=(|x_1|^p+\dots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ τότε $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x_1|^p-\dots-|x_n|^p}dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^p}dx\right)^n$

$$= \left(2\int_0^\infty e^{-x^p}dx\right)^n \overset{x^p=y}{=} \left(\frac{2}{p}\int_0^\infty y^{\frac{1}{p}-1}e^{-y}dy\right)^n = \left(\frac{2}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n = \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right)^n$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty p t^{n+p-1} e^{-t^p} dt \overset{t^p=s}{=} \Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $p=2$ $|B_2^n| = \frac{(2\Gamma(\frac{1}{2}+1))^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

και αν $p=1$ $|B_1^n| = \frac{2^n}{n!}$

<u>Συνάρτηση Γ</u>

Ορίζεται $\Gamma:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

- $\Gamma(1)=1$
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- Η συνάρτηση Γ είναι λογαριθμικά κυρτή, δηλ. $\log\Gamma$ είναι κυρτή

<u>Απόδειξη</u>

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \overset{\sqrt{t}=s}{=} 2\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$

Α $\lambda,\mu \geq 0$ με $\lambda+\mu=1$ ΝΔΟ $\Gamma(\lambda x+\mu y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^\mu$

$\Gamma(\lambda x+\mu y) = \int_0^\infty t^{\lambda x+\mu y-\overset{\lambda+\mu}{1}} e^{-t(\lambda+\mu)} dt = \int_0^\infty (t^{x-1}e^{-t})^\lambda (t^{y-1}e^{-t})^\mu dt$

$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right)^\lambda \left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt\right)^\mu = \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^\mu$