

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Παραδώστε τις ασκήσεις: 3.2, 3.4

Άσκηση 3.1 Αν S, T συλλογές συνόλων αποδείξτε ότι

$$(i) \left(\bigcup_{A \in S} A \right) \times \left(\bigcup_{B \in T} B \right) = \bigcup_{A \in S, B \in T} (A \times B)$$

$$(ii) \left(\bigcap_{A \in S} A \right) \times \left(\bigcap_{B \in T} B \right) = \bigcap_{A \in S, B \in T} (A \times B)$$

Άσκηση 3.2 Θεωρούμε τις σχέσεις ρ και σ στο X . Εάν οι ρ, σ είναι συμμετρικές, εξετάστε ποιές από τις $\rho \cup \sigma, \rho \cap \sigma, \rho \setminus \sigma$, είναι επίσης συμμετρικές.

Άσκηση 3.3 Αν οι ρ, σ είναι σχέσεις ισοδυναμίας σε σύνολο X , τότε ποιές από τις σχέσεις $\rho \cup \sigma, \rho \cap \sigma$ και $\rho \setminus \sigma$ είναι επίσης σχέσεις ισοδυναμίας;

Άσκηση 3.4 Δίνονται οι σχέσεις στο $\mathbb{R}$, που περιέχουν τα ζεύγη που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες. Εξετάστε ποιές από αυτές είναι ανακλαστικές, συμμετρικές, μεταβατικές.

(i) $x < y$

(ii) $x \geq y$

(iii) $|x - y| < 1$

(iv) $|x - y| \leq 0$

(v) $x - y$ είναι ρητός

(vi) $x - y$ είναι άρρητος

Άσκηση 3.5 Στα επόμενα προβλήματα δίνονται σχέσεις σε σύνολα. Εξετάστε αν είναι σχέσεις ισοδυναμίας ή όχι και σε όσες είναι προσδιορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας με όσο πιο απλό τρόπο μπορείτε καθώς και την διαμέριση του συνόλου.

(i) Στο $\mathbb{R}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $|x| = |y|$,

(ii) Στο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $x = ry$,

(iii) Στο σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $y/2 \leq x \leq 2y$,

(iv) Στο $\mathbb{N}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x = 2^n y$.

- (v) Στο $\mathbb{R}^*$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $xy < 0$,
- (vi) Στο $\mathbb{R}^*$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $xy > 0$,
- (vii) Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $(x, y) \sim (a, b)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $(x, y) = \lambda(a, b)$.
(εδώ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στην διαμέριση που προκύπτει και στο $[0, 2\pi)$, βλέπετε ποια είναι ;)
- (viii) Στο $\mathbb{R}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Z}$, (εδώ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στην διαμέριση που προκύπτει και στο $[0, 1)$, βλέπετε ποια είναι ;)

Άσκηση 3.6 Υπάρχει κάποιο λάθος στην παρακάτω απόδειξη ότι εάν μία σχέση $\sim$ είναι συμμετρική και μεταβατική, τότε είναι ανακλαστική; Εξηγήστε την απάντησή σας.

“Απόδειξη”: Εστω $a \sim b$. Αφού η $\sim$ είναι συμμετρική, $b \sim a$. Αφού η $\sim$ είναι μεταβατική, από τα $a \sim b$ και $b \sim a$ συμπεραίνουμε $a \sim a$. Άρα η $\sim$ είναι ανακλαστική.

Άσκηση 3.7 Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις

- (i) $(a, b) \preceq_1 (a', b')$ αν και μονον αν $a + b \leq a' + b'$.
- (ii) $(a, b) \preceq_2 (a', b')$ αν και μονον αν $ab \leq a'b'$.
- (iii) $(a, b) \preceq_3 (a', b')$ αν και μονον αν $a \leq a'$ και $b \leq b'$.

Εξετάστε ποιές από τις παραπάνω σχέσεις ορίζουν σχέση μερικής ή ολικής διάταξης.