11/02/2025

Θα δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^d = \{x : x = (x_1, \dots, x_d)\}$, εφοδιασμένο με την ευκλείδεια νόρμα $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$. Γνωρίζουμε ότι $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_2 \|y\|_2$ (Ανισότητα Cauchy-Schwartz)

<u>Απόδειξη ανισότητας Cauchy-Schwartz</u>:

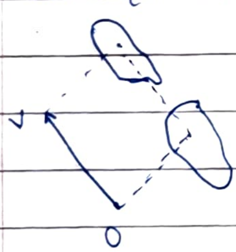
Αν $y = 0$, τότε είναι προφανές. Αν $y \neq 0$, τότε θεωρούμε την $P(t) = \langle x - ty, x - ty\rangle$
$= \langle x, x\rangle - 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$
$(\langle z, x+y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle \quad , \quad \langle a z, x\rangle = a\langle z, x\rangle)$

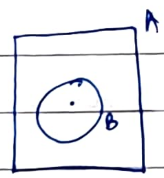
Πρέπει $\Delta \le 0 \Leftrightarrow 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \le 0$ επειδή $P(t) \ge 0$
και άρα $|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \le \|x\|_2 \|y\|_2$

<u>Αθροισμα Minkowski</u>

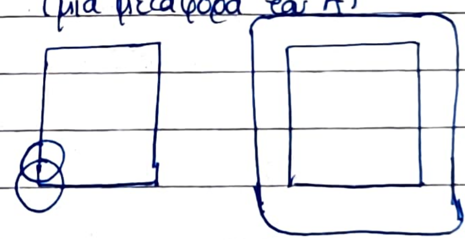
Αν A, B είναι δύο σύνολα, $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$

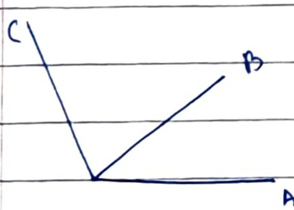
- Ειδικότερα αν το B είναι μονοσύνολο $\{v\}$, τότε το $A+B = A+\{v\} = A+v$ (μια μεταφορά του A)

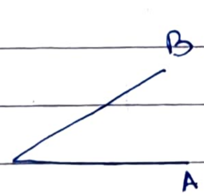




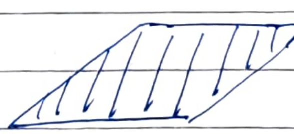
$A+B =$



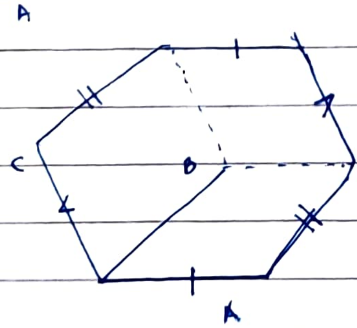




$A+B =$



$A+B+C =$

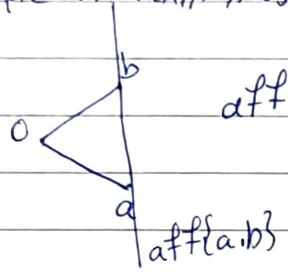


Γραμμικός Συνδυασμός

Αν $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda_j \in \mathbb{R}$ τότε το άθροισμα $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός

Αν επιπλέον $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, τότε λέγεται ομοπαραλληλικός (affine) συνδυασμός

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών συμβολίζεται με $\text{span}\{x_1,\dots,x_k\}$ και το σύνολο όλων των ομοπαραλληλικών συνδυασμών συμβολίζεται με $\text{aff}(\{x_1,\dots,x_k\})$ (αφινική ή ομοπαραλληλική θήκη)



$$\text{aff}\{a,b\} = \{\kappa a + \lambda b, \text{ με } \kappa+\lambda=1\} = \{\kappa a + (1-\kappa) b, \ \kappa \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\kappa(a-b) + b, \ \kappa \in \mathbb{R}\} \text{ ευθεία}$$

<u>Υπόχωρος</u> είναι το $\text{span}\{x_1,\dots,x_k\}$ που περιέχει το 0

<u>Ομοπαραλληλικός υπόχωρος</u> είναι κάθε μορφής $\underset{\uparrow \text{ υπόχωρος}}{F} + x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$

<u>Πρόταση</u>

Αν $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^d$, τότε η $\text{aff}(\{x_1,\dots,x_k\})$

i) είναι ομοπαραλληλικός υπόχωρος

ii) Αν S ομοπαρ/κος υπόχωρος που περιέχει τα $x_1,\dots,x_k$, τότε $S \supseteq \text{aff}(\{x_1,\dots,x_k\})$

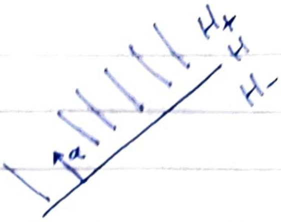
iii) $\text{aff}(\{x_1,\dots,x_k\}) = \bigcap\limits_{\substack{S \text{ ομ/κος} \\ \text{και } x_1,\dots,x_k \in S}} S$

<u>Απόδειξη του i)</u>

$$\text{aff}(\{x_1,\dots,x_k\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \text{ με } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{(1-\lambda_2-\lambda_3-\dots-\lambda_k)x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k, \ \lambda_2,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$$
$$= \{x_1 + \lambda_2(x_2-x_1) + \dots + \lambda_k(x_k - x_1), \ \lambda_2,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}\}$$
$$= \text{span}(\{x_2-x_1,\dots,x_k-x_1\}) + x_1$$

Οι ομοπαραλληλικοί υπόχωροι διάστασης 1 λέγονται υπερεπίπεδα
Κάθε υπερεπίπεδο είναι της μορφής $H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle = b\}$
$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle \geq b\}$, $H_- = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle \leq b\}$

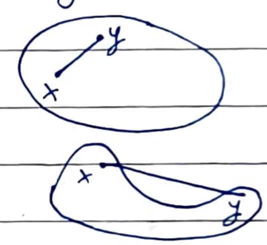


Θεώρημα:
Αν $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ και $y_i = \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_{i1}, \dots, x_{id}, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Τότε τα $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι ομοπαραλληλικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν τα $y_1, \dots, y_k$ είναι ανεξάρτητα

Εξήγηση: Θα λέμε ότι τα $z_1, z_2, \dots, z_k$ είναι ομοπαραλληλικώς ανεξάρτητα αν δεν μπορώ να γράψω κάποια από τα z_i, π.χ το z_1 ως $z_1 = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i z_i$ και $\sum_{i=2}^{k} \lambda_i = 1$

Κυρτά Σύνολα

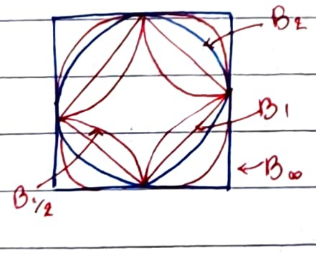
Ορισμός
Ένα σύνολο A θα λέγεται κυρτό, αν για κάθε $x, y \in A$, $[x, y] \subseteq A$
όπου $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda) y, \ 1 \geq \lambda \geq 0\}$



Πρόταση:
- Τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο
- Οι υπόχωροι, οι ομοπαραλληλικοί υπόχωροι, οι κλειστοί (και οι ανοιχτοί) ημίχωροι είναι κυρτά σύνολα

Απόδειξη: Αν $x, y \in H_+$ τότε $\lambda \langle x, a \rangle \geq \lambda b$, $(1-\lambda) \langle y, a \rangle \geq b(1-\lambda)$ $\Rightarrow \langle \lambda x + (1-\lambda) y, a \rangle \geq b$ $\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in H_+$

Οι p-μπάλες $B_p = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \leq 1\}$ όπου $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}$



Για $p=1/2$ δεν είναι κυρτό

$x,y \in B^2_{1/2}$ $\quad \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \leq 1$

$\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|} \leq 1$

Αν $0 \leq \lambda \leq 1$ τότε θα ήθελα $\lambda x + (1-\lambda) y \in B^2_{1/2}$

$\| \; (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)$

$\sqrt{|\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1|} + \sqrt{|\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2|} \leq 1$

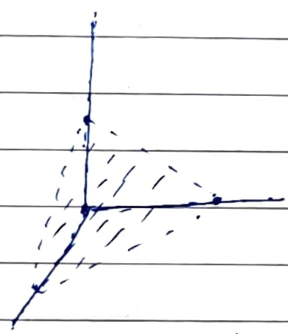
επιλέγουμε $x=(1,0)$, $y=(0,-1)$

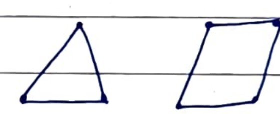
13/02/2025

Ορισμός (κυρτός συνδυασμός)

Αν $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ με $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ τότε το διάνυσμα $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ λέγεται κυρτός συνδυασμός των x_i

Κυρτή θήκη των $x_1, \dots, x_k$ $\quad conv(\{x_1, \dots, x_k\}) := \{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0 \text{ με } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \}$





Στον $\mathbb{R}^d$, την κυρτή θήκη οποιωνδήποτε $d+1$ σημείων την ονομάζουμε simplex

Η κυρτή θήκη των $\{0, e_1, e_2, \dots, e_d\}$ λέγεται κανονικό (regular) simplex

Πρόταση

Αν το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι μη κενό, τότε είναι κυρτό αν και μόνο αν κάθε κυρτός συνδυασμός σημείων του ανήκει στο A

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Αν $x,y \in A$ τυχόντα τότε ξέρω πως $\lambda x + (1-\lambda) y \in A \Rightarrow A$ κυρτό

($\Rightarrow$) Με επαγωγή. Έστω ότι ισχύει για οποιαδήποτε k σημεία, $k \geq 2$

Θα το αποδείξουμε για $k+1$.

Έστω $x_1, \dots, x_{k+1} \in A$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ (Υποθέτω ότι $\lambda_{k+1} < 1$).

τοτε $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} = (1-\lambda_{k+1})\underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}} x_k\right)}_{\in A} + \lambda_{k+1} \underbrace{x_{k+1}}_{\in A}$

γιατι $\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1-\lambda_{k+1}$

Αρα και $(1-\lambda_{k+1})\left(\frac{\lambda_1 x_1}{1-\lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}} x_k\right) + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in A$

<u>Ανισοτητα Jensen</u>:

Αν f κυρτη τοτε $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

<u>Αποδειξη</u>: οπως πριν

<u>Προταση</u>

Εστω $S \subseteq \mathbb{R}^d$ μη-κενο

i) Το συνολο conv(S) (Το συνολο όλων των κυρτων συνδυασμων σημειων του S) είναι κυρτο συνολο

ii) Αν $A \supseteq S$ και A κυρτό, τοτε $A \supseteq$ conv(S)

<u>Αποδειξη του ii)</u>

Εστω $s \in$ conv(S). Τοτε υπάρχουν $s_1, \dots, s_k \in S$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ με $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ ωστε $s = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i$. Ομως $S \subseteq A$ αρα $s_1, \dots, s_k \in A$ και επειδη A κυρτό $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i \in A$ απο προηγουμενη προταση, δηλαδη $s \in A$ αρα conv$(S) \subseteq A$

<u>Θεωρημα (Καραθεοδωρη)</u>

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $x \in$ conv(A). Τοτε υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1} \geq 0$ με $\lambda_1 + \dots + \lambda_{d+1} = 1$ και $x_1, \dots, x_{d+1} \in A$ ωστε $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{d+1} x_{d+1}$

<u>Αποδειξη</u>

Εφοσον $x \in$ conv(A), υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ με $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ και $x_1, \dots, x_k \in A$ ωστε $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = A$ δηλ $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix}$ (1)

Παίρνω το ελάχιστο τέτοιο k. Θέλω νδο $k \leq d+1$

Εστω προς άτοπο $k \geq d+2$

Τότε τα $\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_k \\ 1 \end{bmatrix}$ που ανήκαν στο $\mathbb{R}^{d+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

Επομένως υπάρχουν $\mu_1, \dots, \mu_k$ ώστε $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ (2)

Από (1) και (2) έχω ότι $\forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + t\mu_i) \begin{bmatrix} x_i \\ 1 \end{bmatrix}$

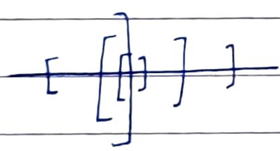
Για $t=0$, όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί
Διαλέγω t ώστε τουλάχιστον ένα να μηδενιστεί και όλα τα άλλα θετικά

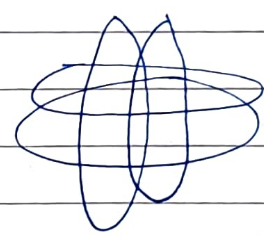
Ξέρω ότι $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + t\mu_i) = 1 + t \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1 + 0 = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

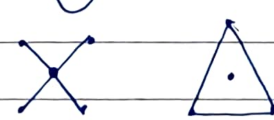
Άτοπο γιατί θα έχουμε γράψει το $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ ως κυρτό συνδυασμό λιγότερο από $d+2$ διανυσμάτων

Θεώρημα Helly
Έστω $K_1, \dots, K_n$, $n \geq d+1$ κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^d$, και οποιαδήποτε $d+1$ έχουν μη κενή τομή, τότε όλα έχουν μη-κενή τομή, δηλ $K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_n \neq \emptyset$

$d=1$

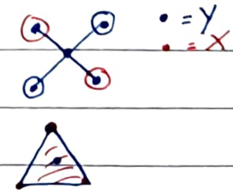






Θεώρημα (Radon)
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $|A| \geq d+2$
Τότε υπάρχει διαμέριση του $A = X \cup Y$ $(X \cap Y = \emptyset)$ ώστε $\mathrm{conv}(X) \cap \mathrm{conv}(Y) \neq \emptyset$

π.χ για $d=2$



Απόδειξη
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $|A| \geq d+2$
Το σύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} : a \in A \right\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ και είναι γραμμικά εξαρτημένο. Άρα υπάρχουν μ_i $\sum \mu_i \begin{bmatrix} a_i \\ 1 \end{bmatrix} = 0$
και άρα $\sum \mu_i = 0$

Έστω $I = \{i : \mu_i > 0\}$ και $J = \{j : \mu_j \leq 0\}$ $I \cap J = \emptyset$
$A_I = \{a_i : i \in I\}$, $A_J = \{a_j : j \in J\}$ και $A_I \cup A_J = A$ και $A_I \cap A_J = \emptyset$ $(I \cap J = \emptyset)$

Τότε $\sum_{i \in I} \mu_i \begin{bmatrix} a_i \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{j \in J} -\mu_j \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum_{i \in I} \frac{\mu_i}{\sum_{i \in I} \mu_i} \begin{bmatrix} a_i \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{j \in J} \frac{-\mu_j}{\sum_{j \in J} -\mu_j} \begin{bmatrix} a_j \\ 1 \end{bmatrix}$

Δηλ. $\underbrace{\sum_{i \in I} \frac{\mu_i}{\sum_{i \in I} \mu_i} a_i}_{\in \, conv(A_I)} = \underbrace{\sum_{j \in J} \frac{-\mu_j}{\sum_{j \in J} -\mu_j} a_j}_{\in \, conv(A_J)}$ επειδή $\sum_{i \in I} \mu_i = \sum_{j \in J} -\mu_j$

και Δηλαδή $conv(A_I) \cap conv(A_J) \neq \emptyset$

Απόδειξη Θεωρήματος Helly

Με επαγωγή στο n. Όταν $n = d+1$ ισχύει προφανώς.
Έστω $n \geq d+2$ και ότι ισχύει για όλα τα $k \leq n$

Ορίζουμε $G_j = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} K_i \neq \emptyset$. Τότε έχω τομή $\underset{\geq d+1}{n-1}$ συνόλων μη κενά από επαγωγική υπόθ.

Οπότε $G_j \neq \emptyset$. Παίρνω $z_1 \in G_1, z_2 \in G_2, \dots, z_n \in G_n$. Όμως $n \geq d+2$ άρα μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα Radon για το $A = \{z_1, \dots, z_n\}$
Μπορώ να βρω X, Y ξένα ώστε $A = X \cup Y$ και $conv(X) \cap conv(Y) \neq \emptyset$
Έστω $z \in conv(X) \cap conv(Y)$. Θδο $z \in K_1 \cap \dots \cap K_n$. Θδο $z \in K_1$

Κοιτάζω το $z_1 \in X \cup Y$, έστω $z_1 \in X$, $z_1 \in K_2 \cap \dots \cap K_n$ και $z_j \in K_1$ για $j \neq 1$
και άρα $Y \subseteq K_1$ οπότε και $conv(Y) \subseteq K_1 \Rightarrow z \in K_1$
Ομοίως $z \in K_2, K_3, \dots, K_n$ και δηλ. $z \in K_1 \cap \dots \cap K_n$

18/02/2025

Θεώρημα Helly:

Αν $K_1, K_2, \dots, K_n$ κυρτά $\subseteq \mathbb{R}^d$ και οποιαδήποτε $d+1$ έχουν μη κενή τομή, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$

Ερώτηση: Αν $\{K_i : i\in I\}$ είναι οικογένεια κυρτών στον $\mathbb{R}^d$ και οποιαδήποτε $d+1$ έχουν μη κενή τομή τότε $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$;

Γενικά όχι: π.χ τα διαστήματα $(0,\frac{1}{n})$ ή τα $[n,+\infty)$

Αν υποθέσω ότι ~~τα~~ η οικογένεια αποτελείται από συμπαγή υποσύνολα, τότε η πρόταση ισχύει

Απόδειξη

Αν $J\subseteq I$ και J πεπερασμένο τότε $\bigcap_{j\in J} K_j \neq \emptyset$ (από το Helly)

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\bigcap_{j\in I} K_j = \emptyset \Rightarrow K_i \subseteq \bigcup_{\substack{j\neq i \\ j\in I}} K_j^c$

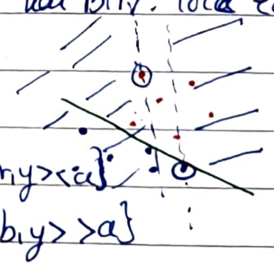
K_i συμπ. $\Rightarrow$ K_j^c ανοιχτά άρα υπάρχει $F\subseteq I$ πεπερασμένο $K_i \subseteq \bigcup_{\substack{j\neq i \\ j\in F}} K_j^c \Rightarrow \bigcap_{j\in F\cup\{i\}} K_j = \emptyset$

Άτοπο γιατί το $F\cup\{i\}$ πεπερασμένο

Εφαρμογές του Θ. Helly:

Θεώρημα Kirchberger:

Έστω R, B δύο πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ (από κόκκινα και μπλε στοιχεία)
Υποθέτουμε ότι για κάθε $Y\subseteq R\cup B$ με $|Y|\leq d+2$ σημεία ισχύει ότι μπορούμε να διαχωρίσουμε με υπερεπίπεδο τα $R\cap Y$ και $B\cap Y$. Τότε τα R, B διαχωρίζονται με υπερεπίπεδο



Απόδειξη

Για κάθε $r\in R$ ορίζουμε το σύνολο $C_r = \{(y,a)\in\mathbb{R}^{d+1} : \langle r,y\rangle < a\}$
και για κάθε $b\in B$ ορίζουμε το $C_b = \{(y,a)\in\mathbb{R}^{d+1} : \langle b,y\rangle > a\}$

Τι σημαίνει ότι τα $R\cap Y$ και $B\cap Y$ διαχωρίζονται; Σημαίνει ότι μπορώ να βρω υπερεπίπεδο H ώστε $R\cap Y \subseteq H_-$ και $B\cap Y \subseteq H_+$

Για το $H=\{x: \langle x,y\rangle = a\}$

$H_- = \{x: \langle x,y\rangle < a\}$ $\quad R\cap Y \subseteq H_- \Rightarrow \langle r,y\rangle < a \ \forall r\in R\cap Y$

$H_+ = \{x: \langle x,y\rangle > a\}$ $\quad B\cap Y \subseteq H_+ \Rightarrow \langle b,y\rangle > a \ \forall b\in B\cap Y$

Η συνθήκη είναι ισοδύναμη με το εξής:
Αν πάρω οποιαδήποτε το πολύ $d+2$ σύνολα από τα $C_r, C_b \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$, τότε αυτά θα έχουν κοινό σημείο. Δηλαδή η τομή τους είναι μη κενή

Από θεώρημα Helly υπάρχει σημείο στην τομή όλων των C_r και C_b
Δηλαδή υπάρχει $(y,a)\in\mathbb{R}^{d+1}$ ώστε $(y,a)\in C_r \ \forall r$ και $(y,a)\in C_b \ \forall b$
Άρα το $H=\{x: \langle x,y\rangle = a\}$ διαχωρίζει τα R, B

Πρόταση:
Αν $S\subseteq\mathbb{R}^d$ μη κενό συμπαγές, τότε η $conv(S)$ είναι συμπαγές $\subseteq\mathbb{R}^d$

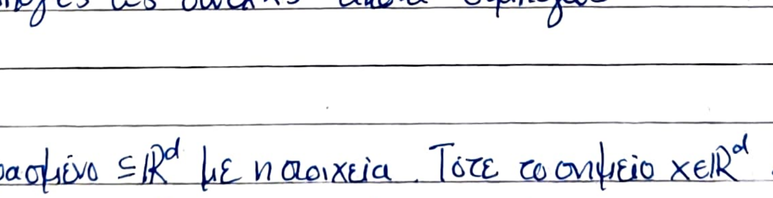
Απόδειξη

Ορίζω $f: S\times\dots\times S\times\Delta \longrightarrow conv(S)$

$$f(y_1,y_2,\dots,y_{d+1},\underbrace{a_1,\dots,a_{d+1}}_{\vec{a}\in\Delta=\{(a_1,\dots,a_{d+1}):\ a_i\geq 0 \text{ και } \sum a_i=1\}}) = a_1y_1+a_2y_2+\dots+a_{d+1}y_{d+1}$$

f συνεχής και $S\times\dots\times S\times\Delta$ συμπαγές
f επί από Θεώρημα Καραθεοδωρή και άρα $f(S\times\dots\times S\times\Delta)=conv(S)$
Δηλ. $conv(S)$ συμπαγές ως συνεχής εικόνα συμπαγούς

Ορισμός
Έστω X ένα πεπερασμένο $\subseteq\mathbb{R}^d$ με n στοιχεία. Τότε το σημείο $x\in\mathbb{R}^d$ λέγεται κεντρικό σημείο (centrepoint) αν κάθε κλειστός ημίχωρος που περιέχει το x περιέχει τουλάχιστον $\frac{n}{d+1}$ σημεία του X



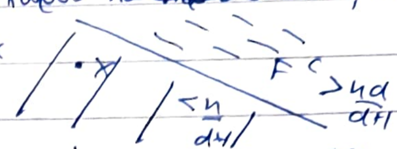
Θεώρημα (Rado)

Υπάρχει πάντα κεντρικό σημείο (για κάθε πεπερασμένο $X \subseteq \mathbb{R}^d$)

(Το $\frac{n}{d+1}$ δεν μπορεί να βελτιωθεί Δ)

Απόδειξη

Αρκεί να βρω $x \in \mathbb{R}^d$ ώστε κάθε ανοιχτός ημίχωρος ~~...~~, που περιλαμβάνει τουλ. $\frac{nd}{d+1}$ σημεία περιέχει το x



Έστω F κλειστός ημίχωρος που περιέχει το x και έστω προς άτοπο ότι περιέχει λιγότερα από $\frac{n}{d+1}$ σημεία του X, τότε ο F^c είναι ανοιχτός ημίχωρος έχει τουλ. $n-\frac{n}{d+1}=\frac{nd}{d+1}$, αλλά δεν περιέχει το x, Άτοπο

Έστω G η οικογένεια όλων των $\text{conv}(H\cap X)$ H ανοιχτοί ~~...~~ ώστε $|X\cap H|>\frac{nd}{d+1}$

Θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε d+1 στοιχεία της οικογένειας G έχουν μη-κενή τομή

Πράγματι έστω $K_1,\dots,K_{d+1}\in G$ και κοιτάζω $|K_1^c\cup\dots\cup K_{d+1}^c\cap X|$

$$|K_1^c\cup\dots\cup K_{d+1}^c\cap X|\le\sum_{i=1}^{d+1}|K_i^c\cap X| < \frac{n}{d+1}(d+1)=n=|X|$$

Άρα $K_1^c\cup\dots\cup K_{d+1}^c\cap X\neq X$ και άρα το συμπλήρωμα του $K_1^c\cup\dots\cup K_{d+1}^c$ μέσα στο X είναι μη κενό, δηλ. $K_1\cap\dots\cap K_{d+1}\neq\emptyset$

Οπότε από Θ. Helly έχουμε το ζητούμενο

Θεώρημα

Αν μ Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$, τότε $\exists y\in\mathbb{R}^d$: αν G είναι κλειστός ημίχωρος με $y\in G$ τότε $\mu(G)\ge\frac{1}{d+1}$

20/02/2025

Όγκος

$|A| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\,dx$ ή $vol_n(A)$

Θεώρημα: Κάθε κυρτό σώμα (συμπαγές με μη κενό εσωτερικό) έχει όγκο

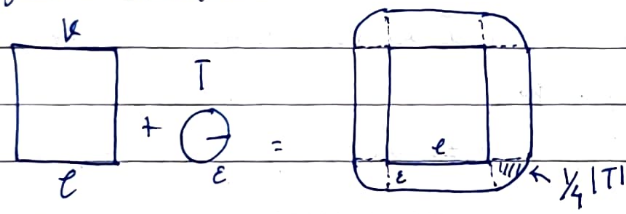
Ιδιότητες του Όγκου:

1) Αναλλοίωτος ως προς μεταφορές αν $x\in\mathbb{R}^n$ τότε $|x+K| = |K|$
2) Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ και $K\subseteq\mathbb{R}^n$ μετρήσιμο τότε $|\lambda K| = \lambda^n|K|$

Γενικότερα αν T αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός, τότε:

$$\underbrace{|T(K)|}_{=\int_{T(K)} 1\,dx} = |\det T|\underbrace{|K|}_{=\int_{K} 1\,dx}$$

Όγκος αθροίσματος



$$|K+T| = |K|+|T|+4\ell\varepsilon = |K|+|T|+4\sqrt{|K|\frac{|T|}{\pi}}$$

$$|K+T| = |K|+|T|+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{|K||T|} > |K|+|T|+2\sqrt{|K||T|} = \left(|K|^{1/2}+|T|^{1/2}\right)^2$$

Άρα $|K+T|^{1/2} > |K|^{1/2}+|T|^{1/2}$

Θεώρημα (ανισότητα Brunn-Minkowski)

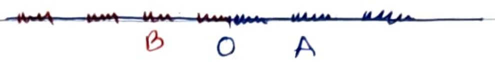
Αν A, B είναι συμπαγή (ή ανοιχτά και φραγμένα) υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε
$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}$

Παρατήρηση: Ισχύει και αν υποθέσουμε ότι $A, B, A+B$ μετρήσιμα

Απόδειξη

· Για $n=1$. Θ.δ.ο. $|A+B| \geq |A|+|B|$

Από το αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, μπορώ να υποθέσω ότι
$\inf(A) = \sup(B) = 0$



Επειδή $A \cap B = \emptyset$ έχουμε ότι ~~|A+B|~~ $A+B \supseteq A \cup B$

και άρα $|A+B| \geq |A \cup B| \underset{\text{ξένα}}{=} |A|+|B|$

Θα δείξουμε το εξής. Έστω $0<\theta<1$ και $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ κάτω ημισυνεχείς, με συμπαγή φορέα και υποθέτουμε ότι $h((1-\theta)x+\theta y) \geq f(x)^{1-\theta} g(y)^{\theta}, \forall x,y \in \mathbb{R}$

Τότε:

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}} g\right)^{\theta}$$

(φορέας συνάρτησης $\{x : f(x) \neq 0\}$)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{f(x)} 1 \,dt\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} 1_{\{t \leq f(x)\}}\,dt\,dx = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{t \leq f(x)\}}\,dx\,dt = \int_0^{\infty} |\{f(x) \geq t\}|\,dt \right)$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\|h\|_\infty = 1$

Αν $g(y) > \lambda$ και $f(x) > \lambda \Rightarrow h((1-\theta)x + \theta y) > \lambda$

$\Rightarrow \{x : h(x) > \lambda\} \supseteq \theta\{y : g(y) > \lambda\} + (1-\theta)\{x : f(x) > \lambda\}$

$$|\{z : h(z) > \lambda\}| \geq |\theta\{y : g(y) > \lambda\} + (1-\theta)\{x : f(x) > \lambda\}|$$
$$\underset{\text{Brunn Minkowski για } n=1}{\geq} \theta|\{y : g(y) > \lambda\}| + (1-\theta)|\{x : f(x) > \lambda\}|$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |\{h(z)>\lambda\}|\,d\lambda \geq \theta \int_0^{\infty} |\{g(y)>\lambda\}|\,d\lambda + (1-\theta)\int_0^{\infty} |\{f(x)>\lambda\}|\,d\lambda$$

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq \theta \int_{\mathbb{R}} g + (1-\theta)\int_{\mathbb{R}} f \overset{\text{Jensen}}{\geq} \left(\int_{\mathbb{R}} f\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}} g\right)^{\theta}$$

(γιατί $\theta A + (1-\theta)B \geq A^{\theta}B^{1-\theta}$

· $\log(\theta A + (1-\theta)B) \geq \theta \log A + (1-\theta)\log B$ και $\log$ κοίλη)

Αν τώρα έχουμε $f, g, h : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ με τις ίδιες υποθέσεις και $h((1-\theta)x+\theta y) \geq (f(x))^{1-\theta}(g(y))^{\theta}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

τότε $\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\theta}$ Precopa Leindler

Με επαγωγή: Για $n=1$ το ξέρω

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\,dx_1\cdots dx_{n-1}\right]dx_n$$

$= \int_{\mathbb{R}} h_{n-1}(x_n)\,dx_n$ Εφαρμόζουμε για την $h_{n-1}(x_n)$ την ανισότητα για $n=1$

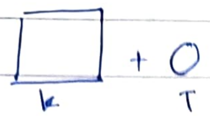
$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}} f_{n-1}\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}} g_{n-1}\right)^{\theta} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\theta}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα για $f = 1_A$, $g = 1_B$, $h = 1_{(1-\theta)A+\theta B}$

έχουμε $h((1-\theta)x+\theta y) \geq (f(x))^{1-\theta}(g(y))^{\theta}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\theta} \Rightarrow |(1-\theta)A+\theta B| \geq |A|^{(1-\theta)}|B|^{\theta}$$

Παίρνουμε $\theta = \dfrac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}}$

για το 

$$|K+T| = |K| + |T| + 4\ell\varepsilon$$

$$4\ell = \frac{|K+T| - |K| - |T|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

άρα $4\ell = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{|K+T| - |K| - |T|}{\varepsilon}$

<u>Ορισμός επιφάνειας</u>: $S(K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{|K+\varepsilon B_2^n| - |K|}{\varepsilon}$

<u>Ισοπεριμετρική ανισότητα</u>: Από όλα τα K με ίδιο όγκο ποιο έχει την ελάχιστη περίμετρο; Η μπάλα

Απόδειξη

$$|K+\varepsilon B_2^n| \geq \left(|K|^{1/n} + |\varepsilon B_2^n|^{1/n}\right)^n \Rightarrow \frac{|K+\varepsilon B_2^n| - |K|}{\varepsilon} \geq \frac{\left(|K|^{1/n} + \varepsilon |B_2^n|^{1/n}\right)^n - |K|}{\varepsilon}$$

Διωνυμικό Θεώρημα και όριο $\quad S(K) \geq n|K|^{\frac{n-1}{n}} |B_2|^{\frac{1}{n}}$

$$\left(\frac{S(K)}{S(B_2^n)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \geq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}$$

$$\Rightarrow \frac{S(K)^{\frac{1}{n-1}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{S(B_2^n)^{\frac{1}{n-1}}}{|B_2^n|^{\frac{1}{n}}}$$