

Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1 α) Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο έτσι ώστε για οποιαδήποτε τρία από αυτά να υπάρχει κυκλικός δίσκος ακτίνας 1 που τα περιέχει. Να αποδείξετε ότι υπάρχει κυκλικός δίσκος ακτίνας 1 που περιέχει όλα τα n σημεία.

Άσκηση 2 Θεωρούμε στο επίπεδο n παράλληλα τμήματα. Υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε τρία από αυτά υπάρχει μια ευθεία που τα τέμνει. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να βρούμε μια ευθεία που τα τέμνει όλα.

Άσκηση 3 α) Να δώσετε παράδειγμα συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει ότι $A + A \neq 2A$. Αν όμως $A \subset \mathbb{R}^d$ είναι κυρτό, να αποδείξετε ότι $A + A = 2A$.
β) Θεωρούμε τον μοναδιαίο δίσκο $D = \{x \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου A διαφορετικού από το $\frac{1}{2}D$, ώστε $A - A = D$.

Άσκηση 4 Να αποδείξετε ότι οι ℓ_p μπάλες είναι κυρτά σύνολα αν και μόνο αν $p \geq 1$.

Άσκηση 5 Έστω P ένα πολυώνυμο στο $\mathbb{C}[x]$, βαθμού $d \geq 2$. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του P' ανήκουν στην κυρτή θήκη των ριζών του P .

Υπόδειξη. Θεωρήστε τον λόγο $\frac{P'(x)}{P(x)}$.

Άσκηση 6 Έστω $\mathcal{H}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών ημιεπιπέδων στο $\mathbb{R}^d$ και έστω C ένα κυρτό σύνολο στο $\mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $C \subset \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Τότε υπάρχει μια υποοικογένεια $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, με $|\mathcal{H}'| = d + 1$, τέτοια ώστε $C \subset \bigcup_{H \in \mathcal{H}'} H$.

Άσκηση 7 Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η διάμετρος του K ορίζεται από την

$$\text{diam}(K) = \max\{\|x - y\|_2 : x, y \in K\}.$$

Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\text{diam}(K) \leq 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το K να περιέχεται στην κλειστή μπάλα $B(u, r_n)$ με κέντρο u και ακτίνα

$$r_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Παράδοση μέχρι 07-03-2025.