

MEM 103 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Παραδώστε τις ασκήσεις: 2.1 (iii), 2.5.

Άσκηση 2.1 Δείξτε τις επόμενες ιδιότητες της συμμετρικής διαφοράς συνόλων.

(i) $A \Delta A = \emptyset$,

(ii) $A \Delta \emptyset = A$.

(iii) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(iv) $A \Delta B = B \Delta A$

(v) $(A \Delta B) \Delta A = B$

(vi) Με χρήση του (v) δείξτε ότι αν $A \Delta B = A \Delta C$ τότε $B = C$.

Άσκηση 2.2 Αν A, B είναι σύνολα, δείξτε τα ακόλουθα για τα δυναμοσύνολά τους

(i) $\mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B) = \mathfrak{P}(A \cap B)$,

(ii) $\mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cup B)$,

(iii) $\bigcap_{X \in \mathfrak{P}(A)} X = \emptyset$,

(iv) $A = \bigcup_{X \in \mathfrak{P}(A)} X$.

Άσκηση 2.3 Βρείτε άπειρη ακολουθία ανοικτών διαστημάτων A_i , που η τομή τους να είναι το διάστημα $[2, 3]$.

Άσκηση 2.4 Αν $A_k = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k \text{ και } n \leq 2k\}$ για κάθε $k = 1, 2, 3, \dots$, βρείτε την τομή $\bigcap_k A_k$ και την ένωση $\bigcup_k A_k$.

Άσκηση 2.5 Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ορίζουμε $A_n = [0, 1 - 2^{-n}]$ και $B_n = [0, 1 - 3^{-n}]$. Δείξτε ότι κάθε A_n είναι γνήσιο υποσύνολο του B_n αλλά $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$.

Άσκηση 2.6 Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2\}$ και $B = \{10, 20, 30\}$. Βρείτε τα σύνολα $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $A \times B \times A$.