

Z54 Διδακτική της Γεωμετρίας

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε.
Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. **Πρέπει να απαντήσετε τα Θέματα Α και Β.** Μπορείτε να απαντήσετε μέχρι δύο από τα θέματα Γ, Δ, Ε, Ζ.
Ο μέγιστος βαθμός κάθε θέματος δίδεται σε παρένθεση.
3. Όπου χρειάζεται, σχεδιάστε ένα **πρόχειρο αλλά έγκυρο διάγραμμα** με μολύβι. **Πρόχειρο** σημαίνει ότι δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσετε κανόνα και διαβήτη, ούτε να παραστήσετε τα μήκη και τις γωνίες με μεγάλη ακρίβεια. **Έγκυρο** σημαίνει ότι πρέπει να τηρούνται οι σχέσεις σύμπτωσης και διάταξης μεταξύ σημείων, ευθειών και κύκλων.

Πρέπει να απαντήσετε τα Θέματα Α και Β.

ΘΕΜΑ Α. (25)

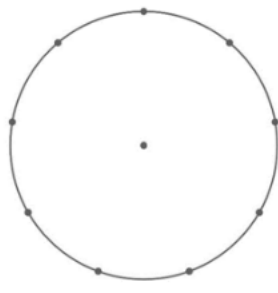
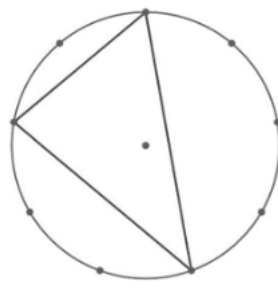
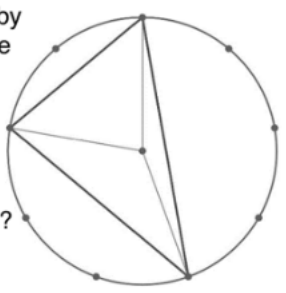
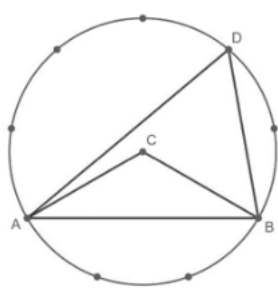
Χρησιμοποιήστε τις θεωρίες των τριών στοιχειωδών γεωμετριών (Houdement, Kuzniak) και των επιπέδων γεωμετρικής σχέψης (D. και P.van Hiele) για να σχολιάσετε δύο διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις της σχέσης εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας:

- α'. την προσέγγιση της Liz, (E.Papadaki) με τον κύκλο με εννέα σημεία, για την ανακάλυψη της σχέσης από μαθήτριες και μαθητές ηλικίας 12 – 13 ετών.
- β'. την απόδειξη του Θεωρήματος, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο της Α' Λυκείου.

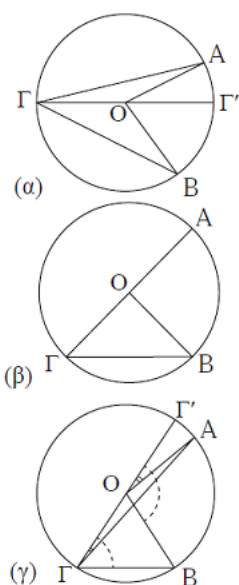
Είναι αυτές οι προσεγγίσεις συμβατές με το είδος της γεωμετρίας που διδάσκεται σε αυτή την εκπαιδευτική βαθμίδα και με το επίπεδο γεωμετρικής σχέψης που αναμένεται να έχουν οι μαθητές και μαθήτριες στις αντίστοιχες τάξεις; Ποιά πλεονεκτήματα και ποιά μειονεκτήματα βλέπετε στις δύο προσεγγίσεις;

(Η απάντηση να μην ξεπερνάει τις 400 λέξεις.)

α'. Οι τέσσερις δραστηριότητες της τάξης της Liz με τον κύκλο με εννέα σημεία.

1. How many different triangles can you make by joining the centre dot to the dots on the circle? What are the angles in the triangles? 	2. Here is a triangle formed by joining three dots on the edge of the nine-point circle: Can you work out the angles of this triangle? 
3. Create some triangles by joining three dots on the edge of the nine point circle. How many different triangles can you make? Can you work out the angles each time? 	4. Can you work out the angles ACB and ADB? What do you notice? 

β'. Η απόδειξη του Θεωρήματος εγγεγραμμένης γωνίας, στο βιβλίο της Α' Λυκείου.



Σχήμα 4

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω κύκλος (O, R) και ένα τόξο του $\widehat{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\widehat{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $\widehat{AOB} = 2\widehat{AGB}$.

- i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{AGB}$ (σχ.4α). Έστω Γ' το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ . Το τρίγωνο $AO\Gamma$ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{OAG} = \widehat{OGA}$. Η $\widehat{\Gamma'OA}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AO\Gamma$, επομένως $\widehat{\Gamma'OA} = 2\widehat{OGA}$ και όμοια έχουμε ότι $\widehat{\Gamma'OB} = 2\widehat{OGB}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

$$\hat{A}\hat{O}B = 2\hat{A}\hat{I}B.$$

- ii) Ας εξετάσουμε κατόπιν την περίπτωση όπου το O ανήκει σε μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $\hat{A}\hat{I}B$ (σχ.4β). Η επίκεντρη γωνία $\hat{A}\hat{O}B$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $\Gamma O B$, οπότε $\hat{A}\hat{O}B = 2\hat{A}\hat{I}B$.
- iii) Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις (σχ.4γ).

ΘΕΜΑ Β. (25)

Δίδονται τρία σημεία του επιπέδου, E , Z , H . Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο ώστε το σημείο H βρίσκεται στην ευθεία $B\Gamma$, τα σημεία E και Z βρίσκονται στην πλευρά AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, και ΓE , BZ είναι διχοτόμοι του τριγώνου.

Τι συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα σημεία E , Z , H για να είναι δυνατή η κατασκευή;

Μπορείτε να απαντήσετε σε δύο από τα Θέματα Γ , Δ , E , Z .

ΘΕΜΑ Γ. (25) Θεωρήστε το πρόβλημα:

Πρόβλημα: Δίδεται παραλληλόγραμμο $ABCD$. Στην προέκταση της πλευράς AB προς το B παίρνουμε σημείο M με $BM = BC$. Στην ημιευθεία DA παίρνουμε σημείο N με $DN = DC$. Να δείξετε ότι οι ευθείες CM και CN είναι κάθετες.

Θέλουμε να αναλύσουμε τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος χρησιμοποιώντας τη θεωρία αναπαραστάσεων του R.Duval. Για την επίλυση του προβλήματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τουλάχιστον τρία διαφορετικά πεδία αναπαράστασης, τη φυσική γλώσσα, το διάγραμμα και συμβολικές σχέσεις.

Περιγράψτε τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, επισημαίνοντας τις μετατροπές μεταξύ διαφορετικών πεδίων και την επεξεργασία στο εσωτερικό κάθε πεδίου.

Εξετάστε σημεία στα οποία μπορεί να προκύψουν δυσκολίες, κυρίως μετατροπή μεταξύ πεδίων που δεν βρίσκονται σε προφανή αντιστοιχία, ή επεξεργασίες σε πολυλειτουργικά πεδία.

(Η απάντηση να μην ξεπερνάει τις 400 λέξεις.)

ΘΕΜΑ Δ. (25)

Θεωρήστε τρίγωνο $AB\Gamma$. Δείξτε, χωρίς να χρησιμοποιήσετε αποτελέσματα τα οποία προϋποθέτουν το αίτημα των παραλλήλων, ότι εάν $\angle B\hat{A}\Gamma = \angle A\hat{B}\Gamma + \angle A\hat{\Gamma}B$, τότε υπάρχει σημείο Δ στην $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta$ διαιρεί το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε δύο ισοσκελή

τρίγωνο.

Εάν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\angle B A \Gamma = 3 \angle B \Gamma A$, δείξτε ότι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία υπάρχει σημείο Δ στην $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta$ διαιρεί το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε δύο ισοσκελή τρίγωνα. Δείξτε επίσης ότι αυτό το αποτέλεσμα δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς το αίτημα των παραλλήλων.

ΘΕΜΑ Ε. (25)

Σχολιάστε την απόδειξη του Θεωρήματος εγγεγραμμένης γωνίας στο βιβλίο της Α' Λυκείου (δες Θέμα Α) ως προς την πληρότητα, τη διάταξη των μερών, την καταλληλότητα των διαγραμμάτων κ.ά.

Γράψτε μία απόδειξη της περίπτωσης (ii), όπου $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, επισημαίνοντας τα στοιχεία της δομής της απόδειξης, σύμφωνα με τους Miyazaki, Fujita & Jones: καθολικές και ατομικές προτάσεις, καθολική υποστασιοποίηση και υποθετικός συλλογισμός.

ΘΕΜΑ Ζ. (25)

Θεωρήστε τις προσανατολισμένες υ-ευθείες $(-1, 3)$ και $(0, \infty)$ και το σημείο $w = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}}i$. Έστω d η απόσταση του w από την υ-ευθεία $(-1, 3)$.

α'. Βρείτε μετασχηματισμό Möbius f που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(-1, 3)$ στην $(0, \infty)$.

β'. Βρείτε το σημείο $f(w)$.

γ'. Δείξτε ότι η γωνία παραλληλισμού της απόστασης d , είναι $\zeta = \pi/3$.

Καλή Επιτυχία!