

Z54 Διδακτική της Γεωμετρίας

ΠΜΣ Μαθηματικά και Εκπαίδευση

Επανάληψη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, 3.

Απάντηση στο Πρόβλημα του Quiz 2.2.1.

Εξετάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ABC , με $AB = AC$, $BC = 2\rho$ και $\angle ABC = \beta$. Για να υπάρχει το τρίγωνο ABC πρέπει οι ημιευθείες που σχηματίζουν γωνία β με τη BC να τέμνονται. Για να συμβεί αυτό, πρέπει η γωνία β να είναι μικρότερη από τη γωνία παραλληλισμού $\Pi(\rho)$.

Οι εξωτερικές διχοτόμοι στα B και C , σχηματίζουν γωνία με τη βάση BC ίση με $\phi = \frac{\pi - \beta}{2}$. Για να τέμνονται οι διχοτόμοι πρέπει η γωνία ϕ να είναι μικρότερη από τη γωνία παραλληλισμού $\Pi(\rho)$.

Συνδυάζοντας τις δύο συνθήκες, συμπεραίνουμε ότι οι εξωτερικές διχοτόμοι στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABC τέμνονται μόνον όταν

$$\pi - 2\Pi(\rho) < \beta < \Pi(\rho).$$

Αλλά $\Pi(\rho)$ είναι γνήσια φθίνουσα, συνεχής συνάρτηση του ρ , με $\Pi(0) = \pi/2$ και $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Pi(\rho) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $\pi - 2\Pi(\rho)$ είναι γνήσια αύξουσα, συνεχής, με τιμές από 0 μέχρι π . Έστω ρ_0 τέτοιο ώστε $\Pi(\rho_0) = \pi/3$. Τότε, για $\rho < \rho_0$, $\pi - 2\Pi(\rho) < \Pi(\rho)$, και υπάρχουν τιμές του β που ικανοποιούν τις συνθήκες.

Συγκεκριμένα, για κάθε $\rho \in (0, \rho_0)$ και κάθε $\beta \in (\pi - 2\Pi(\rho), \Pi(\rho))$, οι εξωτερικές διχοτόμοι στο αντίστοιχο ισοσκελές τρίγωνο τέμνονται. Τότε και η εσωτερική διχοτόμος από την A διέρχεται από το σημείο τομής.

Διαισθητικά, εάν η βάση 2ρ είναι μεγάλη, τότε για να υπάρχει το τρίγωνο πρέπει η γωνία β να είναι μικρή. Αλλά τότε ϕ είναι μεγάλη, και δεν τέμνονται οι εξωτερικές διχοτόμοι. Θα δούμε ότι $\Pi(\rho) = \arcsin(1/\cosh \rho)$. Μπορείτε να υπολογίσετε ότι $\rho_0 \approx 0,55$ μονάδες μήκους της υπερβολικής γεωμετρίας.

Άσκηση 3.1 Θεωρήστε γνωστή την ανισότητα της εξωτερικής γωνίας τριγώνου. Γράψτε σε μορφή διαγράμματος ροής την απόδειξη της Πρότασης:

Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Στην Άσκηση δίδεται ως γνωστή η ανισότητα της εξωτερικής γωνίας τριγώνου, η οποία ισχύει ανεξάρτητα από το αίτημα των παραλλήλων. Συνεπώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άθροισμα των γωνιών τριγώνου.

Άσκηση 3.2 Να κατασκευάσετε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ όταν γνωρίζετε τα μήκη των πλευρών του και τη γωνία υπό την οποία τέμνονται οι ευθείες AB και $\Delta\Gamma$.

Υπόδειξη: Κατά την ανάλυση, θεωρήστε σημείο E τέτοιο ώστε BE είναι παράλληλο και ίσο προς το $\Gamma\Delta$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Για να παρακολουθήσετε την απάντηση, πρέπει να σχεδιάσετε το διάγραμμα που περιγράφεται.

Ανάλυση: Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, και από το B φέρουμε παράλληλη προς τη $\Delta\Gamma$, και λαμβάνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $BE = \Delta\Gamma$. Τότε $\Delta BE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, και $\Gamma E = \Delta B$. Βρίσκουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $ZE = AB$ και $Z\Gamma = \Delta\Delta$. Τότε τα τρίγωνα ΓEZ και ΔBA είναι ίσα και οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι παράλληλες, (γιατί;).

Κατασκευή: Έχουμε δεδομένα τα μήκη a, b, c, d και τη γωνία $\vartheta = \angle XO\Psi$. Θα κατασκευάσουμε τετράπλευρο με $a = |AB|$, $b = |B\Gamma|$, $c = |\Gamma\Delta|$, $d = |\Delta A|$ και γωνία μεταξύ των ευθειών AB και $\Delta\Gamma$ ίση με ϑ .

Κατασκευάζουμε πάνω στην ημιευθεία OX ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος a . Από το B φέρουμε ημιευθεία BE παράλληλη προς την $O\Psi$ που σχηματίζει γωνία $\angle XBE = \vartheta$ και $|BE| = c$. Κατασκευάζουμε το σημείο Z τέτοιο ώστε $|EZ| = a$ και AZ είναι παράλληλη προς τη BE . Κατασκευάζουμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $|B\Gamma| = b$ και $|Z\Gamma| = d$. Κατασκευάζουμε το σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη προς την EB και $A\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $Z\Gamma$. Το ζητούμενο τετράπλευρο είναι $AB\Gamma\Delta$.

Διερεύνηση: Εάν τα τέσσερα μήκη ικανοποιούν τις σχέσεις

$$b + d \geq |BZ| \geq |b - d|,$$

όπου BZ είναι πλευρά τριγώνου ABZ με $|AB| = a$, $|AZ| = c$ και $\angle ZAB = \vartheta$, τότε η παραπάνω διαδικασία κατασκευάζει σημεία A, B, Γ και Δ με $a = |AB|$, $b = |B\Gamma|$, $c = |\Gamma\Delta|$, $d = |\Delta A|$ και γωνία μεταξύ των ευθειών AB και $\Delta\Gamma$ ίση με ϑ . Όταν οι ανισότητες είναι γνήσιες, υπάρχουν δύο ζεύγη σημείων, Γ_1, Δ_1 και Γ_2, Δ_2 , ενώ όταν $|BZ| = b + d$ ή $|BZ| = |b - d|$ υπάρχει μοναδικό ζεύγος Γ, Δ . Όμως τα 4 σημεία δεν είναι πάντα διαφορετικά, και όταν είναι διαφορετικά, το τετράπλευρο που δημιουργούν δεν είναι πάντα απλό και κυρτό. Είναι χρήσιμο να σχεδιάσετε την κατασκευή στο Geogebra και να πειραματιστείτε με διαφορετικές τιμές των a, b, c, d και ϑ .

Άσκηση 3.3 Δίδεται σημείο A στο εσωτερικό ενός κύκλου. Να κατασκευάσετε χορδή $B\Gamma$ του κύκλου που διέρχεται από το A και έχει δοθέν μήκος μ .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Θεωρούμε κύκλο (K, r) . Εάν $B\Gamma$ είναι χορδή μήκους μ , τότε $KB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με πλευρές r, r και μ .

Έχω δεδομένο κύκλο (K, r) και σημείο A τέτοιο ώστε $|KA| < r$. Κατασκευάζω ισοσκελές τρίγωνο $KB\Gamma$ με πλευρές r, r και μ . Κατασκευάζω το μέσο M του $B\Gamma$. Κατασκευάζω

κύκλο $(K, |KM|)$. Κατασκευάζω εφαπτομένη από το A στον κύκλο $(K, |KM|)$, και την προεκτείνω σε χορδή του κύκλου (K, r) . Αυτή είναι η ζητούμενη χορδή.

Για να υπάρχει η χορδή, προφανώς $\mu \leq 2r$. Για να διέρχεται από το A , πρέπει να ισχύει

$$\sqrt{r^2 - \mu^2/4} \leq |KM|.$$

Συνεπώς η κατασκευή είναι δυνατή όταν

$$4r^2 - 4|KA|^2 \leq \mu^2 \leq 4r^2.$$

Άσκηση 3.4 Δίδονται σημεία B, Γ και μήκος μ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων A που σχηματίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM μήκους μ .

Άσκηση 3.5 Κατασκευάστε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδονται τα μήκη του ύψους AK , της διαμέσου AM και της διχοτόμου AD .

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι μπορείτε να κατασκευάσετε τα τρίγωνα $AK\Delta$ και AKM , και ότι η μεσοκάθετος της $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο AD σε σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του $AB\Gamma$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$, τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου και M το μέσο της $B\Gamma$. Εάν E είναι το σημείο τομής της μεσοκάθετης ME με τον περιγεγραμμένο κύκλο, τότε τα τόξα BE και $E\Gamma$ είναι ίσα. Άρα $\angle BAE = \angle EAG$, και E βρίσκεται στη διχοτόμο της $\angle BAG$. Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το σημείο τομής της ME και της μεσοκάθετης του AE .

Έχω δεδομένα τα μήκη $v = |AK|$, $\mu = |AM|$ και $\sigma = |AD|$. Επιλέγω σημείο K σε ευθεία ε . Κατασκευάζω στο K κάθετη ζ στην ε , και σημείο A στην ζ τέτοιο ώστε $|AK| = v$. Κατασκευάζω κύκλο (A, μ) , που τέμνει την ε στο M , και κύκλο (A, σ) που τέμνει την ε στο Δ , με $K - \Delta - M$. Κατασκευάζω την κάθετη προς την ε στο M , η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E . Κατασκευάζω μεσοκάθετη του AE , η οποία τέμνει τη ME στο Λ . Κατασκευάζω κύκλο $(\Lambda, |\Lambda A|)$, ο οποίος τέμνει την ε στα B και Γ . Το ζητούμενο τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$.

Το ζητούμενο τρίγωνο υπάρχει, αρκεί να ισχύει $|AK| \leq |A\Delta| \leq |AM|$.

Άσκηση 3.6 Δύο τεμνόμενοι κύκλοι λέγονται ορθογώνιοι όταν οι ακτίνες στα σημεία τομής σχηματίζουν ορθή γωνία. Δείξτε ότι οι (A, r) και (B, s) είναι ορθογώνιοι εάν και μόνον εάν $|AB|^2 = r^2 + s^2$.

Δίδεται κύκλος (O, r) . Κατασκευάστε κύκλο ορθογώνιο προς τον (O, r) με κέντρο σημείο K εξωτερικό του κύκλου (O, r) .

Άσκηση 3.7 Εξετάστε το πρόβλημα του Απολλώνιου για δύο παράλληλες ευθείες και ένα σημείο. Δηλαδή κατασκευάστε τους κύκλους που εφάπτονται σε δύο δεδομένες παράλληλες ευθείες και διέρχονται από δεδομένο σημείο.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στη μεσοπαράλληλο των δύο παραλλήλων και απέχει από το σημείο όσο το μισό της απόστασης μεταξύ τους. Αυτά έχουν κοινό σημείο μόνον όταν το δοθέν σημείο βρίσκεται μεταξύ των δύο παραλλήλων ή πάνω σε μία από αυτές. Υπάρχουν αντίστοιχα δύο ή ένας τέτοιοι κύκλοι.

Άσκηση 3.8 Δίδεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $|AB| = 3r$. Περιγράψτε τους 8 κύκλους που εφάπτονται στους κύκλους (A, r) , (B, r) και (Γ, r) .

Μπορείτε να υπολογίσετε την ακτίνα κάποιων από αυτούς;

Απάντηση - Υπόδειξη.

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $3r$. Το ύψος του τριγώνου είναι $3\sqrt{3}r/2$. Η απόσταση του κέντρου βάρους G του τριγώνου από την κάθε κορυφή είναι $\sqrt{3}r$.

Ο κύκλος (G, r_1) εφάπτεται εξωτερικά στους τρεις κύκλους (A, r) , (B, r) , (Γ, r) , και έχει ακτίνα $r_1 = (\sqrt{3} - 1)r$.

Ο κύκλος (G, r_2) εφάπτεται εσωτερικά στους τρεις κύκλους (A, r) , (B, r) , (Γ, r) , και έχει ακτίνα $r_1 = (\sqrt{3} + 1)r$.

Ο κύκλος (K_3, r_3) εφάπτεται εσωτερικά στον (A, r) και εξωτερικά στους (B, r) , (Γ, r) . Το σημείο K_3 βρίσκεται στην AG , και σχηματίζει τρίγωνο AK_3B με $AK_3 = r_3 - r$ και $\angle BAK_3 = 30^\circ$. Δείξτε ότι $K_3B = r_3 + r$ και χρησιμοποιήστε τον κανόνα του συνημιτόνου για να υπολογίσετε την ακτίνα

$$r_3 = \frac{15\sqrt{3} - 9}{11}r.$$

Ο κύκλος (K_6, r_6) εφάπτεται εξωτερικά στον (A, r) και εσωτερικά στους (B, r) , (Γ, r) . Το σημείο K_6 βρίσκεται στην ευθεία AG , και σχηματίζει τρίγωνο AK_6B με $AK_6 = r_6 + r$. Βρείτε το K_6B και υπολογίσετε την ακτίνα

$$r_6 = \frac{15\sqrt{3} + 9}{11}r.$$

Ανάλογα έχουμε K_4, K_5 με $r_3 = r_4 = r_5$ και K_7, K_8 με $r_6 = r_7 = r_8$.

Άσκηση 3.9 Ο Χρήστος, μαθητής Γ' Λυκείου, επιχειρεί να απαντήσει το ακόλουθο πρόβλημα κατασκευής:

Δίδεται κύκλος (K, r) , δύο σημεία A και B και μία ευθεία ε . Να κατασκευασθεί κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A και B και τέμνει τον κύκλο (K, r) έτσι ώστε η κοινή χορδή είναι παράλληλη προς την ευθεία ε .

Η κατασκευή του Χρήστου είναι η ακόλουθη:

Σχεδιάζω τον κύκλο με κέντρο K και ακτίνα r , και την ευθεία ε . Φέρω την κάθετη προς την ε από το K . Επιλέγω σημείο Λ στην κάθετη και σχεδιάζω

κύκλο με κέντρο Λ και ακτίνα ρ , τέτοια ώστε

$$|r - \rho| < K\Lambda < r + \rho.$$

Τότε ο κύκλος (Λ, ρ) τέμνει τον κύκλο (K, r) σε δύο σημεία, A και B . (Λ, ρ) είναι ο ζητούμενος κύκλος: διέρχεται από τα A και B , και τέμνει τον κύκλο (K, r) σε χορδή κάθετη στην $K\Lambda$, άρα παράλληλη στην ε .

- Εάν θεωρείτε σωστή την κατασκευή του Χρήστου, συμπληρώστε τη “Διερεύνηση”: σε ποιές περιπτώσεις μπορεί να κατασκευασθεί ο ζητούμενος κύκλος και σε ποιές δεν μπορεί;
- Εάν δεν θεωρείτε σωστή την κατασκευή του Χρήστου, εξηγήστε ποιό είναι το πρόβλημα, και δώστε τη σωστή κατασκευή.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η κατασκευή το Χρήστου είναι λανθασμένη. Σχεδιάζει το διάγραμμα και μετά επιλέγει ως σημεία A και B τα σημεία τομής των δύο κύκλων. Όμως τα σημεία A και B είναι δεδομένα σύμφωνα με την εκφώνηση. Ξεκινώντας από τον κύκλο (K, r) , μία ευθεία ε και δύο σημεία A και B που δεν βρίσκονται υποχρεωτικά πάνω στον κύκλο, πρέπει να κατασκευασθεί ο κύκλος (Λ, ρ) με τις απαιτούμενες ιδιότητες.