

Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 6.3

Μοναδικότητα και σταθερά σημεία.

Θεώρημα 6 Εάν ένας μετασχηματισμός Möbius f αφήνει σταθερά τρία διαφορετικά σημεία $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathcal{H}}$, δηλαδή εάν

$$f(z_1) = z_1, \quad f(z_2) = z_2, \quad f(z_3) = z_3,$$

τότε f είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, $f = \text{id}$.

Απόδειξη. Έστω $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad-bc = 1$. Τα σταθερά σημεία του f ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(z) = z, \quad \text{ή} \quad az + b = cz^2 + dz,$$

δηλαδή είναι ρίζες του τριωνύμου $p(z) = cz^2 + (d-a)z - b$. Όμως γνωρίζουμε ότι ένα πολυώνυμο βαθμού 2 έχει μία ή δύο ρίζες στο $\mathbb{C}$. Αφού $p(z)$ έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες, είναι το μηδενικό πολυώνυμο, και $d-a = b = c = 0$. Άρα $a = d = 1$ και $f(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = z$. □

Παρατηρούμε ότι ο υπερβολικός μετασχηματισμός $j(z) = -\bar{z}$ αφήνει σταθερά όλα τα σημεία της υ-ευθείας ε_0 . Άρα η Πρόταση 6 δεν ισχύει για μετασχηματισμούς που δεν διατηρούν τον προσανατολισμό. Εάν $g(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ αφήνει σταθερά τρία διαφορετικά σημεία $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathcal{H}}$ τα οποία βρίσκονται στην ίδια υ-ευθεία ε (ως σημεία της ευθείας ή ως πέρατα) τότε σύνθεση της g με την ανάκλαση j_ε στην υ-ευθεία ε δίδει ένα μετασχηματισμό Möbius, ο οποίος αφήνει σταθερά τα σημεία z_1, z_2, z_3 και σύμφωνα με την Πρόταση 6, $j_\varepsilon \circ g = \text{id}$. Και αφού $j_\varepsilon^{-1} = j_\varepsilon$, έχουμε $g = j_\varepsilon$. Μπορούμε να δείξουμε ότι εάν τα σημεία $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathcal{H}}$ δεν βρίσκονται στην ίδια υ-ευθεία, τότε δεν υπάρχει υπερβολικός μετασχηματισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό και αφήνει τα τρία σημεία σταθερά.

Πρόταση 7 Εάν $p, q, r \in \partial\mathcal{H}$, υπάρχει μοναδικός υπερβολικός μετασχηματισμός που τα απεικονίζει αντίστοιχα στα $0, 1, \infty$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Για να απεικονίζει τα $p, q, r \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα στα $0, 1, \infty$ πρέπει

$$f(p) = \frac{ap+b}{cp+d} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad b = -ap$$

$$f(r) = \frac{ar+b}{cr+d} = \infty, \quad \text{δηλαδή} \quad d = -cr$$

$$f(q) = \frac{aq+b}{cq+d} = \frac{a(q-p)}{c(q-r)} = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad a = c \frac{q-r}{q-p}.$$

Τελικά, $a(q-p) = c(q-r)$, $b(q-p) = -cp(q-r)$ και $d(q-p) = -cr(q-p)$. Για να δίδουν αυτά τα a, b, c, d το ζητούμενο μετασχηματισμό πρέπει να μπορούμε να επιλέξουμε το c ώστε να ισχύει $ad - bc = 1$. Υπολογίζουμε την ορίζουσα

$$\begin{aligned} (q-p)^2(ad-bc) &= \begin{vmatrix} c(q-r) & -cp(q-r) \\ c(q-p) & -cr(q-p) \end{vmatrix} \\ &= c^2(q-r)(q-p)(p-r). \end{aligned}$$

Εάν $(q-r)(q-p)(p-r) > 0$, υπάρχει c τέτοιο ώστε $c^2 = \frac{q-p}{(q-r)(p-r)}$, και συνεπώς $ad - bc = 1$.

Εάν $(q-r)(q-p)(p-r) < 0$, βρίσκουμε το μετασχηματισμό Möbius f που απεικονίζει τα $-p, -q, -r$ στα $0, 1, \infty$ αντίστοιχα. Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $g(z) = f(-\bar{z})$.

□

Πόρισμα 8 Εάν p_1, q_1, r_1 και p_2, q_2, r_2 είναι τριάδες διαφορετικών (σε κάθε τριάδα) σημείων του $\partial\mathcal{H}$, υπάρχει μοναδικός υπερβολικός μετασχηματισμός $f : \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}$ τέτοιος ώστε

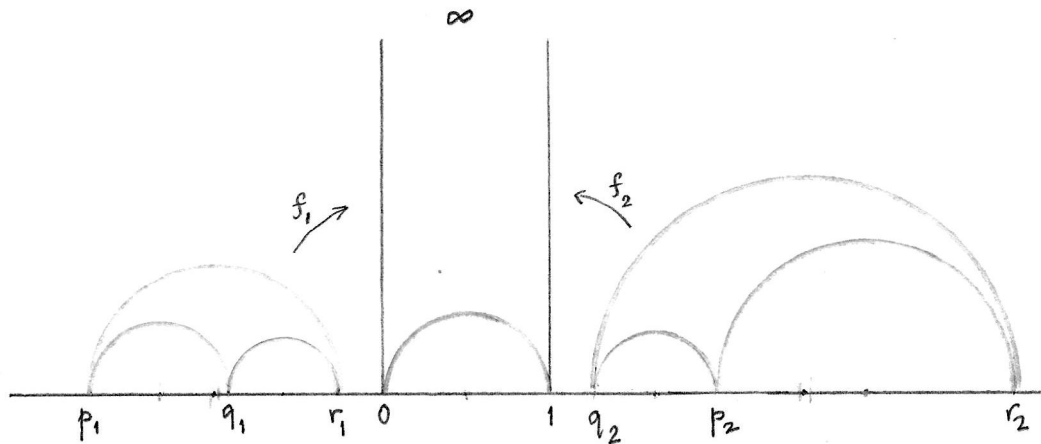
$$f(p_1) = p_2, \quad f(q_1) = q_2, \quad f(r_1) = r_2.$$

□

Για σημεία στο $\mathcal{H}$ δεν υπάρχει πάντα υπερβολικός μετασχηματισμός που να απεικονίζει 3 οποιαδήποτε σημεία σε 3 άλλα, αφού θα δούμε ότι οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τις αποστάσεις μεταξύ σημείων του $\mathcal{H}$.

Λέμε ότι η ομάδα $G_{\mathcal{H}}$ των υπερβολικών μετασχηματισμών δρα **μεταβατικά** και με **μοναδικότητα** στο σύνολο των διατεταγμένων τριάδων διαφορετικών σημείων του $\partial\mathcal{H}$. Αυτό δεν ισχύει για την ομάδα $\text{Möb}_{\mathcal{H}}$, όπως δεν ισχύει και για τριάδες σημείων του $\overline{\mathcal{H}}$.

Ας δούμε ακόμη κάποια παρόμοια αποτελέσματα.



Σχήμα 15: Μετασχηματισμός μεταξύ τριάδων σημείων στο $\partial\mathcal{H}$.

Πρόταση 9 Εάν $u, w \in \mathcal{H}$, υπάρχει μετασχηματισμός Möbius g , όχι μοναδικός, τέτοιος ώστε $g(u) = w$. Δηλαδή, $\text{Möb}_{\mathcal{H}}$ και $G_{\mathcal{H}}$ δρουν μεταβατικά στο $\mathcal{H}$, αλλά όχι με μοναδικότητα.

Απόδειξη. Έστω $u = b + ia$. Τότε $f(z) = az + b$ απεικονίζει το $i \in \mathcal{H}$ στο u . Παρόμοια, υπάρχει g τέτοιος ώστε $g(i) = w$, και $g \circ f^{-1}(u) = w$. □

Πρόταση 10 Εάν $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ είναι προσανατολισμένες υ-ευθείες, υπάρχει μετασχηματισμός Möbius g που απεικονίζει την (α, β) στη (γ, δ) , και διατηρεί τον προσανατολισμό της ευθείας.

Απόδειξη. Εάν $\beta - \alpha > 0$, $g(z) = \frac{\beta z + \alpha}{z + 1}$ είναι μετασχηματισμός Möbius και απεικονίζει την υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην (α, β) .

Εάν $\beta - \alpha < 0$, $f(z) = \frac{\beta z - \alpha}{z - 1}$ είναι μετασχηματισμός Möbius και απεικονίζει την υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην (α, β) .

Συνθέτοντας τέτοιους μετασχηματισμούς Möbius βρίσκουμε τη ζητούμενη απεικόνιση. □

Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Möbius ως απεικόνιση $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Το σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι σταθερό σημείο της f εάν $f(z_0) = z_0$, δηλαδή εάν $az_0 + b = (cz_0 + d)z_0$.

Εάν $c \neq 0$, τα σταθερά σημεία της f στο $\mathbb{C}$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου

$$cz^2 + (d - a)z - b.$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $ad - bc = 1$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (d - a)^2 + 4bc \\ &= (a + d)^2 - 4.\end{aligned}$$

Συνεπώς

- εάν $(a + d)^2 > 4$, η f έχει δύο σταθερά σημεία στο $\mathbb{R} \subseteq \partial\mathcal{H}$,
- εάν $(a + d)^2 = 4$, η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\mathbb{R} \subseteq \partial\mathcal{H}$, και
- εάν $(a + d)^2 < 4$, η f έχει δύο συζυγή σταθερά σημεία στο $\mathbb{C}$, δηλαδή ένα σταθερό σημείο στο $\mathcal{H}$ (και ένα στο κάτω ημιεπίπεδο).

Εάν $c = 0$, από $ad - bc = 1$ έχουμε $d = \frac{1}{a}$, συνεπώς $(a + d)^2 \geq 4$. Σε αυτή την περίπτωση

- εάν $(a + d)^2 = 4$, $a = d = 1$ και $f(z) = z + 1$ που δεν έχει σταθερό σημείο στο $\mathbb{C}$. Έχει μοναδικό σταθερό σημείο το $\infty \in \partial\mathcal{H}$.
- εάν $(a + d)^2 > 4$, τότε $f(z) = a^2z + ab$ που έχει δύο σταθερά σημεία στο $\partial\mathcal{H}$, τα $z = \frac{ab}{1-a^2}$ και $z = \infty$.

Δραστηριότητα 8 Δείξτε ότι για κάθε $a \neq 0$, $(a + \frac{1}{a})^2 \geq 4$, με ισότητα εάν και μόνον εάν $|a| = 1$.

Διατυπώνουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα ως ένα θεώρημα.

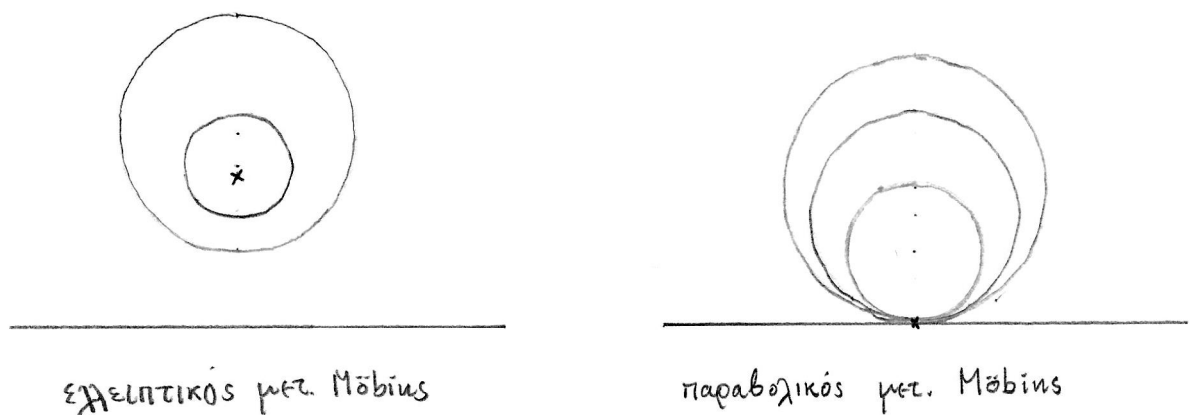
Θεώρημα 11 Ένας μετασχηματισμός Möbius $f : \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}$, $f \neq \text{id}$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

1. Έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\mathcal{H}$ εάν και μόνον εάν $(a + d)^2 < 4$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **ελλειπτικός μετασχηματισμός Möbius**.
2. Έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\partial\mathcal{H}$ εάν και μόνον εάν $(a + d)^2 = 4$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **παραβολικός μετασχηματισμός Möbius**.
3. Έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία στο $\partial\mathcal{H}$ εάν και μόνον εάν $(a + d)^2 > 4$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **υπερβολικός μετασχηματισμός Möbius**.

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που χαρακτηρίζει τον τύπο ενός μετασχηματισμού Möbius είναι το ίχνος, $\text{tr} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$, του πίνακα που παριστάνει το μετασχηματισμό, όταν η ορίζουσα του πίνακα είναι 1, $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = 1$.

Στην γενική περίπτωση όπου $ad - bc > 0$, ορίζουμε την παράμετρο $\tau(f) = \frac{(a+d)^2}{ad-bc}$. Ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ είναι ελλειπτικός, παραβολικός ή υπερβολικός αντίστοιχα εάν $0 \leq \tau(f) < 4$, $\tau(f) = 4$ και $f \neq \text{id}$, ή $\tau(f) > 4$.



Σχήμα 16: Ταξινόμηση των μετασχηματισμών Möbius.

Συζυγείς μετασχηματισμοί.

Θεωρούμε δύο μετασχηματισμούς Möbius, f και h . Ο μετασχηματισμός $h \circ f \circ h^{-1}$ είναι ο **συζυγής** μετασχηματισμός του f μέσω του h . Η συζυγία μετασχηματισμών είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των στοιχείων της ομάδας $\text{Möb}_\mathbb{H}$. Η ταυτοτική απεικόνιση αποτελεί μία κλάση συζυγίας. Θα δούμε ότι οι υπόλοιπες κλάσεις συζυγίας χαρακτηρίζονται από την παράμετρο τ .

Παράδειγμα 5 Εάν $f(z) = az$ και $h(z) = z + b$,

$$\begin{aligned} g(z) &= h \circ f \circ h^{-1}(z) \\ &= h \circ h(z - b) \\ &= h(az - ab) \\ &= az - (a - 1)b. \end{aligned}$$

Σταθερά σημεία του $h \circ f \circ h^{-1}$ είναι τα b και ∞ . Αντίθετα,

$$f \circ h \circ f^{-1} = f \circ h\left(\frac{z}{a}\right) = f\left(\frac{z}{a} + b\right) = z + ab,$$

με μοναδικό σταθερό σημείο το ∞ .

Παράδειγμα 6 Εάν $f(z) = az$ και $h(z) = \frac{z+1}{-z+1}$, με $h^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1}$,

$$\begin{aligned} g(z) &= h \circ f \circ h^{-1}(z) \\ &= \frac{a\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1}{-a\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} \\ &= \frac{(a+1)z - (a-1)}{-(a-1)z + a+1}. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 9 Δείξτε ότι η συζυγία μετασχηματισμών Möbius είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\text{Möb}_{\mathcal{H}}$.

Λήμμα 12 Εάν z_0 είναι σταθερό σημείο του f , τότε $h(z_0)$ είναι σταθερό σημείο του $h \circ f \circ h^{-1}$.

Απόδειξη. Εάν z_0 είναι σταθερό σημείο του f ,

$$h \circ f \circ h^{-1}(h(z_0)) = h \circ f(z_0) = h(z_0).$$

□

Συμπεραίνουμε ότι συζυγείς μετασχηματισμοί έχουν το ίδιο πλήθος σταθερών σημείων, και συνεπώς ανήκουν στον ίδιο τύπο. Αυτό μπορούμε εύκολα να το διαπιστώσουμε και από το την παράμετρο τ . Συζυγείς μετασχηματισμοί αντιστοιχούν σε όμοιους πίνακες στο $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, και αφού

$$\det(ABA^{-1}) = \det B \quad \text{και} \quad \text{tr}(ABA^{-1}) = \text{tr} B,$$

$\tau(h \circ f \circ h^{-1}) = \tau(f)$. Θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο: μετασχηματισμοί Möbius, διαφορετικοί από τον ταυτοτικό, με το ίδιο τ , είναι συζυγείς.

Θεώρημα 13 Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $f \neq \text{id}$.

1. Εάν f είναι παραβολικός, $\tau(f) = 4$, τότε f είναι συζυγής προς τον μετασχηματισμό $z \mapsto z + 1$ ή τον μετασχηματισμό $z \mapsto z - 1$

2. Εάν f είναι υπερβολικός, $\tau(f) > 4$, τότε f είναι συζυγής προς ένα μετασχηματισμό της μορφής $z \mapsto a^2 z$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.
3. Εάν f είναι ελλειπτικός, $0 \leq \tau(f) < 4$, τότε f είναι συζυγής προς ένα μετασχηματισμό της μορφής $z \mapsto \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}$, $0 < \vartheta < \pi$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι f είναι παραβολικός μετασχηματισμός Möbius, με σταθερό σημείο $\alpha \in \partial \mathcal{H}$. Θεωρούμε $\beta \in \partial \mathcal{H}$, $\beta \neq \alpha$, και τον μοναδικό μετασχηματισμό Möbius h ο οποίος απεικονίζει τα β , $f(\beta)$, α στα 0 , 1 , ∞ εάν $(\alpha - \beta)(f(\beta) - \beta)(\alpha - f(\beta)) > 0$, και στα 0 , -1 , ∞ εάν $(\alpha - \beta)(f(\beta) - \beta)(\alpha - f(\beta)) < 0$. Τότε $g = h \circ f \circ h^{-1}$ είναι μετασχηματισμός Möbius με μοναδικό σταθερό σημείο το ∞ .

Έστω $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad - bc = 1$. Αφού $g(\infty) = \infty$, $c = 0$ και $d = \frac{1}{a}$. Άρα $g(z) = a^2 z + ab$. Αφού g δεν έχει άλλο σταθερό σημείο, η εξίσωση $a^2 z + ab = z$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$, και συνεπώς $a^2 = 1$. Αλλά $g(0) = h \circ f(\beta) = \pm 1$, και συνεπώς $b = \pm d$.

Θέτουμε $d = 1$ και έχουμε, ανάλογα με το πρόσημο του $(\alpha - \beta)(f(\beta) - \beta)(\alpha - f(\beta))$, είτε $a = d = b = 1$ ή $a = d = 1$, $b = -1$. Συνεπώς $g(z) = z + 1$ ή $g(z) = z - 1$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι f είναι υπερβολικός μετασχηματισμός Möbius, με σταθερά σημεία α και $\beta \in \partial \mathcal{H}$. Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius τέτοιο ώστε $h(\alpha) = 0$ και $h(\beta) = \infty$, και εξετάζουμε το συζυγή μετασχηματισμό $g = h \circ f \circ h^{-1}$, που έχει σταθερά σημεία 0 και ∞ .

Έστω $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad - bc = 1$. Αφού $g(\infty) = \infty$, $c = 0$ και $d = \frac{1}{a}$. Αφού $g(0) = 0$, $b = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $g(z) = a^2 z$, για $a \neq 0$, $a \neq 1$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι f είναι ελλειπτικός μετασχηματισμός Möbius, με σταθερό σημείο $z_0 \in \mathcal{H}$. Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius τέτοιο ώστε $h(z_0) = i \in \mathcal{H}$, και εξετάζουμε το συζυγή μετασχηματισμό $g = h \circ f \circ h^{-1}$, που έχει σταθερό σημείο i .

Έστω $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad - bc = 1$. Αφού $\frac{ai+b}{ci+d} = i$, $ai + b = di - c$, δηλαδή $a = d$ και $b = -c$. Αλλά τότε $a^2 + b^2 = 1$, και υπάρχει $\vartheta \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $a = \cos \vartheta$ και $b = \sin \vartheta$. Άρα $g(z) = \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}$.

□

Παράδειγμα 7 Εξετάζουμε τον μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{z}{z+1}$. Μοναδικό σταθερό σημείο του f είναι το 0 . Θέτουμε $\beta = \infty$, οπότε $f(\beta) = 1$ και “ $(0 - \infty)(1 - \infty)(0 - 1) < 0$ ”. Θεωρούμε το μετασχηματισμό Möbius h που στέλνει το ∞ , 1 , 0 στο 0 , -1 , ∞ . Αυτός είναι ο $h(z) = \frac{-1}{z}$, για τον οποίο $h^{-1} = h$. Άρα

$$g(z) = h \circ f \circ h(z) = \frac{-1}{\frac{-1}{z} + 1} = z - 1.$$

Παράδειγμα 8 Εξετάζουμε τον μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$. Τα σταθερά σημεία είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2z + 1 = z^2 + z$, δηλαδή $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ένας μετασχηματισμός Möbius h που απεικονίζει το $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ στο 0 και το $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ στο ∞ είναι ο $h(z) = \frac{2z-1-\sqrt{5}}{2z-1+\sqrt{5}}$. Ο μετασχηματισμός Möbius $g = h \circ f \circ h^{-1}$ έχει σταθερά σημεία 0 και ∞ , άρα είναι της μορφής $g(z) = az$.

Μπορούμε να αποφύγουμε να υπολογίσουμε το h^{-1} και το $h \circ f \circ h^{-1}$. Παρατηρούμε ότι $h(\infty) = 1$, άρα $h^{-1}(1) = \infty$, και ότι

$$a = g(1) = h \circ f \circ h^{-1}(1) = h \circ f(\infty) = h(2) = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}.$$

Άρα $g(z) = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} z$.

Ασκήσεις

Άσκηση 10 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $0, 1, \infty \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 11 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $2, -3, 1 \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 12 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(1, 3)$.

Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(3, 2)$.

Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, 3)$ στην $(3, 2)$.

Άσκηση 13 Βρείτε, εάν υπάρχει, μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο $1 + i\sqrt{3}$ στο i .

Βρείτε, εάν υπάρχει, μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο $-2 + i\sqrt{3}$ στο i .

Άσκηση 14 Φέρετε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Möbius σε κανονική μορφή $\frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc = 1$, και εξετάστε εάν είναι ελλειπτικοί, παραβολικοί ή υπερβολικοί. Σε κάθε περίπτωση, βρείτε τα σταθερά σημεία τους.

$$\alpha'. \quad f(z) = -\frac{1}{z}$$

$$\beta'. \quad f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$$

$$\gamma'. \quad f(z) = z + 1$$

$$\delta'. \quad f(z) = 3z$$

$$\varepsilon'. \quad f(z) = \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}$$

$$\varphi'. \quad f(z) = \frac{z}{-2z+1}$$

$$\zeta'. \quad f(z) = 3z + 1$$

$$\eta'. \quad f(z) = \frac{2z+1}{-2z}$$

$$\vartheta'. \quad f(z) = \frac{z}{4z+3}$$

$$\iota'. \quad f(z) = \frac{-3}{z}$$

Άσκηση 15 Βρείτε τα σταθερά σημεία των μετασχηματισμών Möbius:

$$\alpha'. \quad f(z) = \frac{z-2}{z+3}$$

$$\beta'. \quad f(z) = \frac{-3z+1}{2z-2}$$

$$\gamma'. \quad f(z) = \frac{z-1}{4z+5}$$

$$\delta'. \quad f(z) = \frac{-z-4}{z+3}$$

και διακρίνετε τον τύπο κάθε μετασχηματισμού: ελλειπτικό, παραβολικό ή υπερβολικό.

Άσκηση 16 Για τους μετασχηματισμούς της Άσκησης 15, βρείτε την παράμετρο τ και επιβεβαιώστε τον τύπο του μετασχηματισμού.

Άσκηση 17 Για τους μετασχηματισμούς Möbius:

$$\begin{aligned} \alpha'. \quad f(z) &= \frac{z-2}{z+3} & \beta'. \quad f(z) &= \frac{-3z+1}{2z-2} \\ \gamma'. \quad f(z) &= \frac{z-1}{4z+5} & \delta'. \quad f(z) &= \frac{-z-4}{z+3} \end{aligned}$$

βρείτε το μετασχηματισμό h έτσι ώστε ο συζυγής $h \circ f \circ h^{-1}$ να είναι σε κανονική μορφή, και υπολογίστε την κανονική μορφή.

Άσκηση 18 Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ της υ-ευθείας $(0, \infty)$ και της εικόνας της από τον ελλειπτικό μετασχηματισμό

$$f(z) = \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}.$$

Άσκηση 19 Θεωρήστε το μετασχηματισμό Möbius

$$f(z) = \frac{\sqrt{3}z + 1}{-z + \sqrt{3}}.$$

1. Δείξτε ότι $f^6(z) = z$ για κάθε $z \in \mathcal{H}$.
2. Δείξτε ότι εάν $\beta = -c\alpha$, όπου $\alpha > 0$ και $c = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, τότε οι ευθείες (α, β) και $(-\beta, -\alpha)$ τέμνονται σε ορθή γωνία.
3. Βρείτε α τέτοιο ώστε η υ-ευθεία (α, β) να απεικονίζεται από τον μετασχηματισμό Möbius f στην υ-ευθεία $(-\beta, -\alpha)$ (δηλαδή $f(\alpha) = c\alpha$). Λύστε την εξίσωση αριθμητικά, χρησιμοποιώντας Matlab ή Excel.
4. Χρησιμοποιώντας μία από τις δύο τιμές του α που βρήκατε, υπολογίστε (με Matlab ή Excel) τα σημεία $f(\alpha)$, $f^2(\alpha)$, $\dots$, $f^5(\alpha)$ και τα σημεία $\beta = -c\alpha$, $f(\beta)$, $\dots$, $f^5(\beta)$.
5. Σχεδιάστε τις υ-ευθείες (α, β) , $(f(\alpha), f(\beta))$, $\dots$, $(f^5(\alpha), f^5(\beta))$. Τι υπερβολικό σχήμα σχεδιάσατε; Τι γωνία σχηματίζουν οι πλευρές του;