

Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 6.5

Μετρικές σχέσεις τριγώνων στην υπερβολική γεωμετρία

Θα βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών υπερβολικών τριγώνων. Θεωρούμε υπερβολικό τρίγωνο με κορυφές A, B, C , γωνίες α, β, γ και μήκη των απέναντι πλευρών a, b, c αντίστοιχα.

Τρίγωνα με μία ιδεατή κορυφή

Η σχέση της γωνίας παραλληλισμού δίνει τη σχέση μεταξύ των στοιχείων ενός ορθογωνίου τριγώνου με μία ιδεατή κορυφή. Εάν $\beta = \pi/2$ και $C \in \partial\mathcal{H}$, τότε το μήκος της μη άπειρης πλευράς c δίδεται από τη σχέση

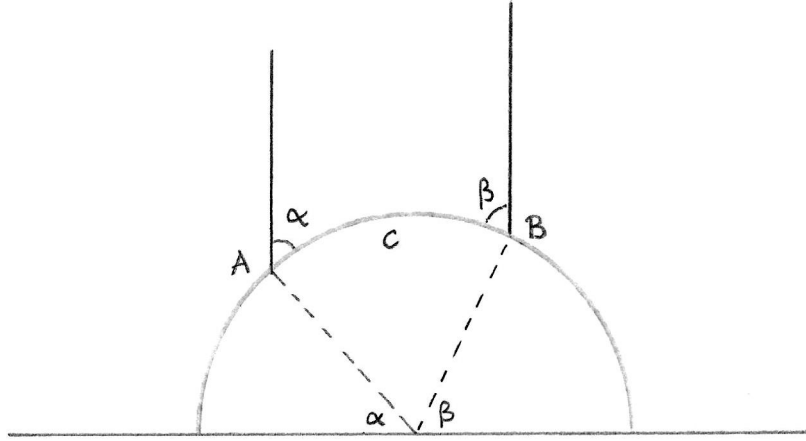
$$\cosh c \sin \alpha = 1.$$

Για το γενικό τρίγωνο με μία ιδεατή κορυφή C , έχουμε το μήκος της μη άπειρης πλευράς c και τις γωνίες α και β .

Πρόταση 20 Σε ένα τρίγωνο με μία ιδεατή κορυφή C , μήκος της μη άπειρης πλευράς c και γωνίες α και β ,

1. $\cosh c \sin \beta \sin \alpha = 1 + \cos \beta \cos \alpha$,
2. $\sinh c \sin \beta \sin \alpha = \cos \beta + \cos \alpha$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε έναν μετασχηματισμό Möbius για να φέρουμε τις κορυφές A και B στα σημεία $A = e^{i\vartheta}$ και $B = e^{i\varphi}$, με $0 < \varphi < \vartheta < \pi$, και την ιδεατή κορυφή στο σημείο $C = \infty$. Τότε $\alpha = \pi - \vartheta$ και $\beta = \varphi$, $\operatorname{Im} A = \sin \vartheta$, $\operatorname{Im} B = \sin \varphi$,



Σχήμα 21: Τρίγωνο με μία ιδεατή κορυφή.

$|A - B|^2 = (\cos \vartheta - \cos \varphi)^2 + (\sin \vartheta - \sin \varphi)^2$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
 \cosh c &= \cosh d(e^{i\vartheta}, e^{i\varphi}) \\
 &= 1 + \frac{|e^{i\vartheta} - e^{i\varphi}|^2}{2 \sin \vartheta \sin \varphi} \\
 &= 1 + \frac{(\cos \vartheta - \cos \varphi)^2 + (\sin \vartheta - \sin \varphi)^2}{2 \sin \vartheta \sin \varphi} \\
 &= \frac{1 - \cos \vartheta \cos \varphi}{\sin \vartheta \sin \varphi} \\
 &= \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.
 \end{aligned}$$

Για να δείξουμε την (β'), αντικαθιστούμε την (α') στην ταυτότητα $\sinh^2 c = \cosh^2 c - 1$, και έχουμε

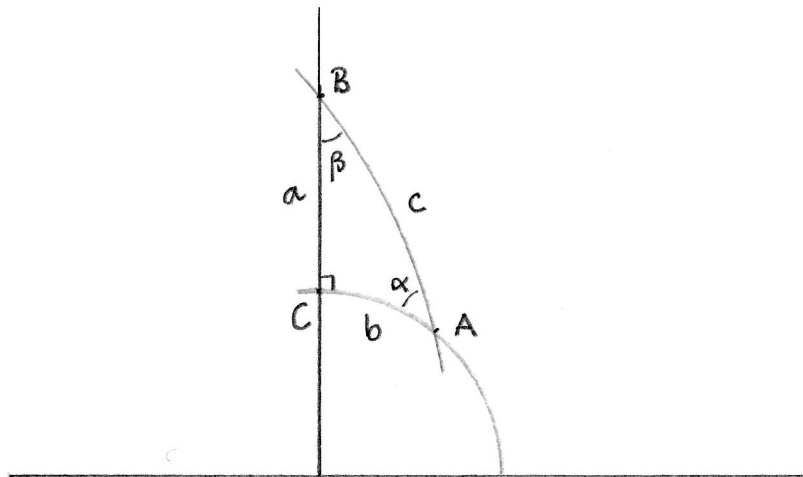
$$\begin{aligned}
 \sinh^2 c &= \frac{(1 + \cos \beta \cos \alpha)^2 - \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta \sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{(\cos \beta + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \beta \sin^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

□

Φραγμένα τρίγωνα

Θεώρημα 21 (Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα) Σε ένα τρίγωνο ABC στο υπερβολικό επίπεδο, με $\gamma = \pi/2$,

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$



Σχήμα 22: Ορθογώνιο τρίγωνο.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε έναν υπερβολικό μετασχηματισμό για να φέρουμε την κορυφή C στο i και την κορυφή B στο ki . Τότε $A = s + it$ με $s^2 + t^2 = 1$. Έχουμε

$$\cosh a = \cosh d(ki, i) = 1 + \frac{|ki - i|^2}{2k} = \frac{k^2 + 1}{2k},$$

$$\cosh b = \cosh d(i, s + it) = 1 + \frac{|s + i(t - 1)|^2}{2t} = \frac{1}{t},$$

και

$$\cosh c = \cosh d(ki, s + it) = 1 + \frac{|s + i(t - k)|^2}{2kt} = \frac{k^2 + 1}{2k} \frac{1}{t}.$$

□

Οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός γενικού τριγώνου στο υπερβολικό επίπεδο δίνονται από Κανόνες Συνημιτόνων και Ημιτόνων, ανάλογους προς τους αντίστοιχους της ευκλείδειας γεωμετρίας. Στην υπερβολική γεωμετρία υπάρχει και ένας δεύτερος Κανόνας Συνημιτόνων, που εκφράζει το μήκος μίας πλευράς του τριγώνου συναρτήσει των γωνιών του. Αυτό εκφράζει το γεγονός ότι στην υπερβολική γεωμετρία δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ ίσων και ομοίων τριγώνων.

Θεώρημα 22 Σε ένα τρίγωνο ABC με γωνίες α, β, γ και μήκη των απέναντι πλευρών a, b, c ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

1. *Κανόνας Συννημιτόνων I*

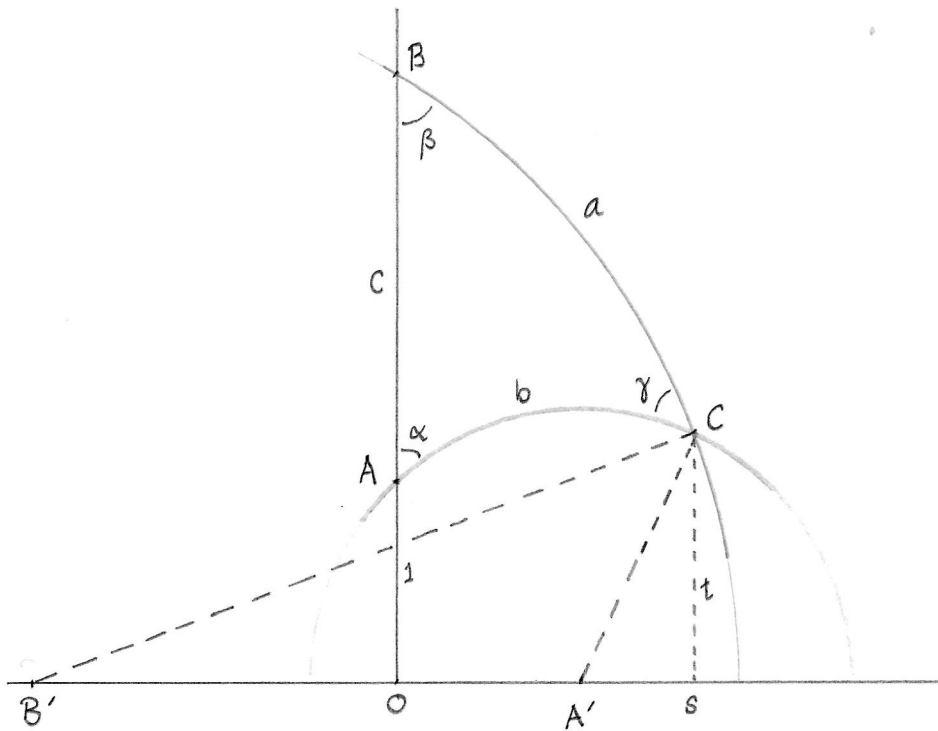
$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma .$$

2. *Κανόνας Συννημιτόνων II*

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} .$$

3. *Κανόνας Ημιτόνων*

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma} .$$



Σχήμα 23: Σκαληνό τρίγωνο.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε έναν υπερβολικό μετασχηματισμό για να φέρουμε την κορυφή A στο i και την κορυφή B στο ki . Τότε $C = s + it$. Θεωρούμε το σημείο $A' = x_1$, το κέντρο του κύκλου που είναι φορέας της υ-ευθείας από τα A και C , και το

σημείο $B' = x_2$, το κέντρο του κύκλου που είναι φορέας της υ-ευθείας από τα B και C . Παρατηρούμε οτι η γωνία $A'CB'$ είναι ίση με τη γωνία γ . Για να αποδείξουμε τον Κανόνα Συνημιτόνων I, εφαρμόζουμε τον ευκλείδειο κανόνα συνημιτόνων στο τρίγωνο $A'B'C$.

$$(A'B')^2 = (A'C)^2 + (B'C)^2 - 2(A'C)(B'C)\cos\gamma,$$

$$(x_1 - x_2)^2 = ((s - x_1)^2 + t^2) + ((s - x_2)^2 + t^2) - 2\sqrt{(s - x_1)^2 + t^2}\sqrt{(s - x_2)^2 + t^2}\cos\gamma.$$

Αφού $A'A = A'C$, έχουμε $x_1^2 + 1 = (s - x_1)^2 + t^2$. Αφού $B'B = B'C$, έχουμε $x_2^2 + k^2 = (s - x_2)^2 + t^2$. Άρα

$$x_1 = \frac{s^2 + t^2 - 1}{2s} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{s^2 + t^2 - k^2}{2s}.$$

Για τα μήκη των πλευρών του τριγώνου έχουμε

$$\begin{aligned} \cosh c &= 1 + \frac{(k-1)^2}{2k} = \frac{1+k^2}{2k}, \\ \cosh b &= 1 + \frac{s^2 + (t-1)^2}{2t} = \frac{s^2 + t^2 + 1}{2t}, \\ \cosh a &= 1 + \frac{s^2 + (k-t)^2}{2kt} = \frac{s^2 + t^2 + k^2}{2kt}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στον ευκλείδειο κανόνα συνημιτόνου, μετά από μακροσκελείς υπολογισμούς, καταλήγουμε στο ζητούμενο. (Σε άλλα μοντέλα του υπερβολικού επιπέδου η απόδειξη του Κανόνα Συνημιτόνων I απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς.)

Για να αποδείξουμε τον Κανόνα των Ημιτόνων, αρκεί να βρούμε μία έκφραση για το $\frac{\sinh c}{\sin \gamma}$ που να μην αλλάζει όταν εναλλάσσουμε τις κορυφές του τριγώνου.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sinh c}{\sin \gamma}\right)^2 &= \frac{\sinh^2 c}{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \frac{\sinh^2 c}{1 - \left(\frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b}\right)^2} \\ &= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{1 + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c)}. \end{aligned}$$

Τέλος, για να αποδείξουμε τον Κανόνα Συνημιτόνων II, θέτουμε

$$A = \cosh a, \quad B = \cosh b, \quad C = \cosh c,$$

και

$$D = 1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2),$$

το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τα A, B, C .

Από το Κανόνα Συνημιτόνων I, έχουμε

$$\cos \gamma = \frac{AB - C}{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}}.$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma &= 1 - \left(\frac{AB - C}{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}} \right)^2 \\ &= \frac{D}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Η έκφραση για το $\sin^2 \gamma$ δείχνει ότι $D \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι εάν πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή του

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

με τη θετική τιμή του $(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}(C^2 - 1)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} &= \frac{(BC - A)(CA - B) + (AB - C)(C^2 - 1)}{D} \\ &= C. \end{aligned}$$

□

Ασκήσεις

Άσκηση 26 Βρείτε τα μήκη των πλευρών ενός υπερβολικού τριγώνου με γωνίες $\pi/2$, $\pi/4$ και $\pi/6$.

Άσκηση 27 Δείξτε ότι ένα ισοσκελές υπερβολικό τρίγωνο (δηλαδή τέτοιο ώστε $d(A, B) = d(A, C)$) έχει τις γωνίες της βάσης ίσες.

Άσκηση 28 Για κάθε $\vartheta \in [0, \pi/3)$ κατασκευάστε ένα ισόπλευρο υπερβολικό τρίγωνο με γωνίες ϑ . (Βρείτε τις κορυφές ενός τέτοιου τριγώνου που βρίσκονται πάνω σε τρεις υ-ευθείες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες $\pi/3$).

Βρείτε το μήκος της πλευράς του τριγώνου συναρτήσει της γωνίας ϑ .

Βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου συναρτήσει της γωνίας ϑ .

Άσκηση 29 Βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου σε ένα κανονικό ορθογώνιο εζάγωνο. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 26.)

Άσκηση 30 Θεωρήστε υπερβολικό τετράπλευρο $ABCD$ με τρεις ορθές γωνίες στις κορυφές A, B, C και $d(A, B) = d(B, C) = t$. Δείξτε ότι $d(A, D) = d(C, D)$. Βρείτε τη σχέση μεταξύ του μήκους t και της γωνίας $\delta = \angle ADC$. Υπολογίστε το μήκος $d(A, D)$ συναρτήσει του t .