

Z54 Διδακτική της Γεωμετρίας

ΠΜΣ Μαθηματικά και Εκπαίδευση

Επανάληψη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, 3.

Άσκηση 3.1 Θεωρήστε γνωστή την ανισότητα της εξωτερικής γωνίας τριγώνου. Γράψτε σε μορφή διαγράμματος ροής την απόδειξη της Πρότασης:

Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές.

Άσκηση 3.2 Να κατασκευάσετε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ όταν γνωρίζετε τα μήκη των πλευρών του και τη γωνία υπό την οποία τέμνονται οι ευθείες AB και $\Delta\Gamma$.

Υπόδειξη: Κατά την ανάλυση, θεωρήστε σημείο E τέτοιο ώστε BE είναι παράλληλο και ίσο προς το $\Gamma\Delta$.

Άσκηση 3.3 Δίδεται σημείο A στο εσωτερικό ενός κύκλου. Να κατασκευάσετε χορδή $B\Gamma$ του κύκλου που διέρχεται από το A και έχει δοθέν μήκος μ .

Άσκηση 3.4 Δίδονται σημεία B, Γ και μήκος μ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων A που σχηματίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM μήκους μ .

Άσκηση 3.5 Κατασκευάστε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδονται τα μήκη του ύψους AK , της διαμέσου AM και της διχοτόμου AD .

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι μπορείτε να κατασκευάσετε τα τρίγωνα $AK\Delta$ και AKM , και ότι η μεσοκάθετος της $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο AD σε σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του $AB\Gamma$.

Άσκηση 3.6 Δύο τεμνόμενοι κύκλοι λέγονται ορθογώνιοι όταν οι ακτίνες στα σημεία τομής σχηματίζουν ορθή γωνία. Δείξτε ότι οι (A, r) και (B, s) είναι ορθογώνιοι εάν και μόνον εάν $|AB|^2 = r^2 + s^2$.

Δίδεται κύκλος (O, r) . Κατασκευάστε κύκλο ορθογώνιο προς τον (O, r) με κέντρο σημείο K εξωτερικό του κύκλου (O, r) .

Άσκηση 3.7 Εξετάστε το πρόβλημα του Απολλώνιου για δύο παράλληλες ευθείες και ένα σημείο. Δηλαδή κατασκευάστε τους κύκλους που εφάπτονται σε δύο δεδομένες παράλληλες ευθείες και διέρχονται από δεδομένο σημείο.

Άσκηση 3.8 Δίδεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $|AB| = 3r$. Περιγράψτε τους 8 κύκλους που εφάπτονται στους κύκλους (A, r) , (B, r) και (Γ, r) .

Μπορείτε να υπολογίσετε την ακτίνα κάποιων από αυτούς;

Άσκηση 3.9 Ο Χρήστος, μαθητής Γ' Λυκείου, επιχειρεί να απαντήσει το ακόλουθο πρόβλημα κατασκευής:

Δίδεται κύκλος (K, r) , δύο σημεία A και B και μία ευθεία ε . Να κατασκευασθεί κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A και B και τέμνει τον κύκλο (K, r) έτσι ώστε η κοινή χορδή είναι παράλληλη προς την ευθεία ε .

Η κατασκευή του Χρήστου είναι η ακόλουθη:

Σχεδιάζω τον κύκλο με κέντρο K και ακτίνα r , και την ευθεία ε . Φέρω την κάθετη προς την ε από το K . Επιλέγω σημείο Λ στην κάθετη και σχεδιάζω κύκλο με κέντρο Λ και ακτίνα ρ , τέτοια ώστε

$$|r - \rho| < K\Lambda < r + \rho.$$

Τότε ο κύκλος (Λ, ρ) τέμνει τον κύκλο (K, r) σε δύο σημεία, A και B . (Λ, ρ) είναι ο ζητούμενος κύκλος: διέρχεται από τα A και B , και τέμνει τον κύκλο (K, r) σε χορδή κάθετη στην $K\Lambda$, άρα παράλληλη στην ε .

- Εάν θεωρείτε σωστή την κατασκευή του Χρήστου, συμπληρώστε τη “Διερεύνηση”: σε ποιές περιπτώσεις μπορεί να κατασκευασθεί ο ζητούμενος κύκλος και σε ποιές δεν μπορεί;
- Εάν δεν θεωρείτε σωστή την κατασκευή του Χρήστου, εξηγήστε ποιό είναι το πρόβλημα, και δώστε τη σωστή κατασκευή.