

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 5.1

Η Γεωμετρία στα αναλυτικά προγράμματα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Το περιεχόμενο

Στο ειδικό τεύχος του Educational Studies in Mathematics, το 1971, υπάρχει η παρατήρηση:

“Από όλες τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν κατά την επεξεργασία ενός προγράμματος σπουδών ως προς το περιεχόμενο, συνήθως η πιο αμφιλεγόμενη και η δυσκολότερα υπερασπίσιμη είναι η απόφαση για τη Γεωμετρία.”

Υπάρχει πάρα πολύ ενδιαφέρουσα Γεωμετρία που εύλογα θα έπρεπε να περιλαμβάνεται στο σχολικό πρόγραμμα, και δεν είναι εύκολο να γίνει η επιλογή.

Η ιστορική θέση της Γεωμετρίας

Αυτό γίνεται ακόμα πιο δύσκολο, εξ αιτίας της ιστορικής θέσης της Γεωμετρίας, η οποία αποτελούσε το κύριο αντικείμενο Μαθηματικών στην εκπαίδευση για περισσότερο από 2000 χρόνια.

Στην Ελλάδα το πρόβλημα περιπλέκεται περαιτέρω από την αντίληψη ότι αποτελεί εθνικό καθήκον η υπεράσπιση της παράδοσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στο σύγχρονο σχολικό πρόγραμμα

Από τα μέσα του 20ου αιώνα αμφισβητείται η θέση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο σύγχρονο σχολικό πρόγραμμα, είτε γιατί θεωρείται ξεπερασμένη, είτε γιατί θεωρείται δύσκολη η διδασκαλία της και η μάθησή της.

Μετά από 60 χρόνια, η σχεδίαση του προγράμματος Γεωμετρίας παραμένει το πιο δύσκολο έργο στη δημιουργία ενός αναλυτικού προγράμματος για τα Μαθηματικά.

Χρονικός περιορισμός της διδασκαλίας της Γεωμετρίας

Οι αλλαγές στο πρόγραμμα Μαθηματικών από το κίνημα New Math στη δεκαετία του 1960, βασίστηκε στη διευρυμένη εφαρμογή της έννοιας της συνάρτησης.

Αυτό οδήγησε στην αφαίρεση της Στερεομετρίας στις περισσότερες χώρες, και στη ριζική αλλαγή της Τριγωνομετρίας.

Αργότερα, προστέθηκαν άλλοι κλάδοι των Μαθηματικών, όπως οι Πιθανότητες και η Στατιστική. Το αποτέλεσμα ήταν ο περιορισμός του χρόνου διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Η μελέτη της ICMI

Τη δεκαετία του '90, η International Commission on Mathematical Instruction ανέλαβε μία μελέτη για τη διδασκαλία και τη μάθηση της Γεωμετρίας. Στο εισαγωγικό κείμενο αναφέρεται.

“Οι Μαθηματικοί και οι ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών συμφωνούν ότι λόγω των πολλαπλών πλευρών της Γεωμετρίας, η διδασκαλία της πρέπει να αρχίζει από μικρή ηλικία και να συνεχίζεται καθ’ όλη τη διάρκεια των σχολικών σπουδών. Αλλά μόλις προσπαθήσουμε να μπούμε στις λεπτομέρειες, οι απόψεις για την υλοποίηση αυτού του στόχου δίστανται.”

Εφαρμογές της Γεωμετρίας

Το εύρος του κλάδου της Γεωμετρίας είναι τεράστιο, και οι εφαρμογές αναρίθμητες:

Φυσική	Χημεία
Τεχνολογικές επιστήμες	Τέχνες
Ιατρική	Βιολογία
Πληροφορική	Ρομποτική

Τι είναι Γεωμετρία;

Σύμφωνα με τον Christopher Zeeman:

“Η Γεωμετρία περιλαμβάνει τους κλάδους των Μαθηματικών που αξιοποιούν την οπτική διαίσθηση (την πιο ισχυρή από τις αισθήσεις μας) για να θυμούνται θεωρήματα, να κατανοούν αποδείξεις, να εμπνέουν εικασίες, να αντιλαμβάνονται την πραγματικότητα και να δίδουν μία καθολική ενόραση.”

Οι στόχοι

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στη σύγχρονη εκπαίδευση σκοπεύει σε πολλαπλούς στόχους.

- α) Να αναπτυχθεί η αντίληψη του χώρου, η γεωμετρική διαίσθηση και η ικανότητα οπτικοποίησης.
- β) Να αποκτηθούν διαφορετικές γεωμετρικές εμπειρίες σε 2 και 3 διαστάσεις.
- γ) Να αναπτυχθεί η γνώση και κατανόηση, καθώς και η δυνατότητα εφαρμογής γεωμετρικών ιδιοτήτων και θεωρημάτων.
- δ) Να ενθαρρυνθεί η ανάπτυξη και η χρήση εικασιών, παραγωγικού συλλογισμού και απόδειξης.

Οι στόχοι

- ❖ Να αναπτυχθούν δεξιότητες εφαρμογής της Γεωμετρίας στη μοντελοποίηση και την επίλυση προβλημάτων σε πραγματικές καταστάσεις.
- ❖ Να αναπτυχθούν δεξιότητες τεχνολογίας της πληροφορίας και επικοινωνίας (ΤΠΕ) σε γεωμετρικά θέματα.
- ❖ Να προκληθεί μία θετική στάση προς τα Μαθηματικά
- ❖ Να αναπτυχθεί η αντίληψη της ιστορικής και πολιτισμικής κληρονομιάς της Γεωμετρίας στην κοινωνία, και των σύγχρονων εφαρμογών της.

Τι πρέπει και τι μπορούν να μάθουν;

Για να προσδιορίσουμε το περιεχόμενο του προγράμματος Μαθηματικών πρέπει να θεωρήσουμε τι θα επιθυμούσαμε να μάθουν οι μαθήτριες, αλλά και τι μπορούν να μάθουν, και με ποιά σειρά.

Ήδη από το 1909, ο Stampfer παρατηρούσε ότι:

“Η ακολουθία που είναι η καλύτερη από λογική άποψη, δεν είναι απαραίτητα η καλύτερη και από παιδαγωγική άποψη.”

Η μάθηση της Γεωμετρίας

Οι γνωστότερες θεωρίες για τη μάθηση της Γεωμετρίας είναι του Piaget και των Van Hiele.

Η θεωρία του Piaget περιλαμβάνει δύο κεντρικές ιδέες:

- Η νοητική αναπαράσταση του χώρου δεν είναι αντανάκλαση, μέσω των αισθήσεων, του περιβάλλοντος ενός ατόμου. Καθώς μαθαίνει, το παιδί κατασκευάζει τη νοητική αναπαράσταση του χώρου, αναδιοργανώνοντας την προηγούμενη αλληλεπίδρασή του με το περιβάλλον.

Η μάθηση της Γεωμετρίας

- Η οργάνωση γεωμετρικών ιδεών ακολουθεί μία συγκεκριμένη διάταξη, που εξαρτάται περισσότερο από τις εμπειρίες. Αυτή ίσως είναι πιο κοντά στη λογική των Μαθηματικών παρά στην ιστορική εξέλιξη της Γεωμετρίας. Τοπολογικές έννοιες, όπως η συνεκτικότητα και η συνέχεια προηγούνται, ακολουθούμενες από σχέσεις γραμμικότητας και παραλληλίας, και τέλος από ευκλείδειες μετρικές σχέσεις.

Η μάθηση της Γεωμετρίας

Σύμφωνα με τη θεωρία των Van Hiele, η πρόοδος από ένα επίπεδο στο επόμενο, εξαρτάται περισσότερο από τη διδασκαλία παρά από την ηλικία.

Ενώ η θεωρία Van Hiele είναι χρήσιμη για την περιγραφή της εξέλιξης των γεωμετρικών εννοιών των μαθητριών, δεν είναι σαφές εάν περιγράφει ικανοποιητικά τις νοερές αναπραστάσεις των παιδιών.

Ένα άλλο ζήτημα είναι ότι η θεωρία αναπτύχθηκε σε σχέση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, και δεν είναι σαφές πώς εφαρμόζεται σε άλλες προσεγγίσεις της Γεωμετρίας.

Πρακτικοί παράγοντες

Υπάρχουν και πρακτικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση της Γεωμετρίας.

- Ο χρόνος που αφιερώνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα.
- Η σχετική έμφαση στην αντίληψη του χώρου, την οπτικοποίηση ή τις αποδείξεις.
- Η χρήση παραδοσιακών γεωμετρικών οργάνων ή νέων τεχνολογιών.

Διαφορετικές προσεγγίσεις

Η Γεωμετρία παρουσιάζεται σε πολλές μορφές, και χρησιμοποιεί διαφορετικές προσεγγίσεις, κάθε μία από τις οποίες έχει τις δικές της τεχνικές, τα δικά της θεμελιώδη ή ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Σε κάθε περίπτωση, ο στόχος είναι να διεγερθεί και να αναπτυχθεί η χωρική αντίληψη του παιδιού, και να αποκτήσει τρόπους σκέψης που θα ενισχύσουν και δεν θα φέρουν κωλύματα στη μελλοντική του μαθηματική ανάπτυξη.

Ποιές είναι οι κεντρικές ιδέες;

Ανεξάρτητα από την προσέγγιση και το περιεχόμενο, υπάρχουν κάποιες κεντρικές ιδέες, όπως **η διάσταση, το αναλλοίωτο ή η συμμετρία**, που αφορούν σε όλη τη Γεωμετρία, ή και σε όλα τα Μαθηματικά αλλά εμφανίζονται με πιο φυσιολογικό τρόπο στη Γεωμετρία.

Θα μπορούσε να αναπτυχθεί ένα πρόγραμμα Γεωμετρίας γύρω από τέτοιες κεντρικές ιδέες;

Πόση έμφαση στις αποδείξεις;

Η απόδειξη κατέχει κεντρικό ρόλο στα Μαθηματικά, και η Γεωμετρία θεωρείται το προνομιακό πεδίο για την εξοικείωση των μαθητριών με αποδείξεις, ώστε να μπορούν να κατανοούν αποδείξεις και να δημιουργούν οι ίδιες απλές αποδείξεις.

Όμως οι προσπάθειες που έχουν γίνει μέχρι τώρα για την κατασκευή προγραμμάτων Γεωμετρίας που θα προσφέρουν στις περισσότερες μαθήτριες και μαθητές μία ουσιαστική εμπειρία κατανόησης και κατασκευής αποδείξεων, δείχνουν ότι αυτό είναι ένα δύσκολο έργο.

Μετά το 2000, έχουν γίνει πολλές έρευνες στη διδασκαλία της απόδειξης, και τα αποτελέσματά τους μπορεί να βοηθήσουν στο μέλλον.

Άλλα ζητήματα

Άλλα ζητήματα που επηρεάζουν αποφάσεις για το πρόγραμμα Γεωμετρίας είναι:

- Ο ρόλος των ορισμών και ο τρόπος εισαγωγής τους.
- Η σύνδεση μεταξύ διαίσθησης και παραγωγικού συλλογισμού.
- Η προστασία από τη δημιουργία λανθασμένων αντιλήψεων.
- Η χρήση γεωμετρικών οργάνων και γεωμετρικού λογισμικού.

Η ακολουθία διδασκαλίας

Εκτός από το ζήτημα του περιεχομένου, πρέπει να επινοηθεί και η κατάλληλη διάταξη της διδασκαλίας.

Πώς θα συνδεθούν τα διάφορα αντικείμενα, λαμβάνοντας υπ' όψιν όχι μόνο λογικά αλλά και παιδαγωγικά ζητήματα;

Που θα τοποθετηθεί ένα κεντρικό θεώρημα, όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα, και ποιά από τις (περισσότερες από 350) αποδείξεις του θεωρήματος ταιριάζει καλύτερα στο συγκεκριμένο πρόγραμμα.

Γνώσεις και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών

Τέλος, δεν αρκεί να δημιουργηθεί ένα πρόγραμμα που μπορεί να διδαχθεί και να μαθευτεί.

Πρέπει να υπάρχουν και οι εκπαιδευτικοί, γυναίκες και άντρες που θα το διδάξουν. Καθώς η στοιχειώδης Γεωμετρία δεν περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα των περισσότερων προγραμμάτων σπουδών μελλοντικών εκπαιδευτικών, απαιτείται ειδική πρόνοια για τη δημιουργία του εκπαιδευτικού υλικού και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών.

Βιβλιογραφία

Ειδικό τεύχος για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, *Educational Studies in Mathematics*. 3, 3-4, 1971.

Mammana, C., Villani, V. (Eds.) Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. New ICMI Study Series, vol 5. Springer, 1998.

K.Jones, Critical issues in the design of the school geometry curriculum. In Bill Barton (Ed.) Readings in Mathematics Education. 75. Auckland. 2000.

H.H.Wu, The role of Euclidean Geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 1996