

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 4.1

Γεωμετρικές Κατασκευές

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Γεωμετρικές κατασκευές

Οι γεωμετρικές κατασκευές αποτελούν ένα σημαντικό μέρος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και της διδασκαλίας της.

Η αυστηρότητα στις γεωμετρικές κατασκευές βοηθάει την ανάπτυξη της λογικής σκέψης.

Ταυτόχρονα η γεωμετρική κατασκευή έχει ένα χειροπιαστό αποτέλεσμα, που την κάνει πιο προσιτή από την αυστηρή απόδειξη.

Η έννοια της γεωμετρικής κατασκευής

Η έννοια της γεωμετρικής κατασκευής πολύ συχνά συγχέεται με την έννοια της σχεδίασης.

Σε αυτή τη σύγχυση συμβάλλουν και τα σχολικά βιβλία, όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα.

Στο βιβλίο της 1ης Γυμνασίου, σελ. 191, ζητείται να κατασκευαστεί γωνία ίση με 30° . Η απάντηση που δίδεται είναι:

Για να κατασκευάσουμε μία γωνία χρησιμοποιούμε μοιρογνωμόνιο

Η έννοια της γεωμετρικής κατασκευής

Όταν το παιδί μάθει να “κατασκευάζει” γωνίες με μοιρογνωμόνιο, είναι πολύ δύσκολο να κατανοήσει αργότερα ότι στις γεωμετρικές κατασκευές δεν χρησιμοποιούμε μετρήσεις, και δεν κάνουμε υπολογισμούς.

Έτσι θεωρεί φυσικό, για παράδειγμα, να χρησιμοποιήσει το κομπιουτεράκι και υποδεκάμετρο, για να κατασκευάσει γεωμετρικά το $\sqrt{3}$.

Γεωμετρική σχεδίαση και γεωμετρική κατασκευή

Πρέπει από τα πρώτα βήματα να γίνει με μεγάλη σαφήνεια η διάκριση μεταξύ του “κατασκευάζω” και του “σχεδιάζω”.

Η γεωμετρική σχεδίαση είναι μία χρήσιμη διαδικασία, η οποία αποτελεί σημαντικό μέρος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Η σχεδίαση ανήκει στον κόσμο της Φυσικής Γεωμετρίας: σχεδιάζουμε στο χαρτί ή στον πίνακα, αναπαριστούμε γεωμετρικά αντικείμενα στον φυσικό κόσμο.

Κατά τη διάρκεια της σχεδίασης, κατανοούμε τους περιορισμούς στην ακρίβεια που θέτουν τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε: το πάχος της μύτης του μολυβιού, η ακρίβεια των οργάνων μέτρησης, κλπ.

Γεωμετρική σχεδίαση και γεωμετρική κατασκευή

Αντιθέτως, η γεωμετρική κατασκευή είναι μία διαδικασία στον εξιδανικευμένο κόσμο της Φυσικής Αξιωματικής Γεωμετρίας.

Για να κάνουμε πιο εύκολα κατανοητή τη διαδικασία μπορεί να αναπαραστήσουμε την κατασκευή με ένα σχέδιο στο χαρτί.

Αλλά η γεωμετρική κατασκευή δεν ταυτίζεται με το τελικό γεωμετρικό αντικείμενο, ούτε με την κατά προσέγγιση αναπαράσταση της κατασκευής σε ένα σχέδιο.

Γεωμετρική σχεδίαση και γεωμετρική κατασκευή

Η γεωμετρική κατασκευή αποτελείται από συγκεκριμένα βήματα, κάθε ένα από τα οποία εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός στοιχειώδους σχήματος (σημείου, ευθείας ή κύκλου) με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι η ύπαρξη ενός σύνθετου σχήματος που ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες.

Υπάρχουν διάφορα είδη γεωμετρικής κατασκευής ανάλογα από το ποιά βήματα επιτρέπονται κατά τη διαδικασία.

Ευκλείδεια γεωμετρική κατασκευή

Στην κλασική Ευκλείδεια κατασκευή “με κανόνα και διαβήτη” τα βήματα που επιτρέπονται είναι οι ακόλουθες θεμελιώδεις κατασκευές.

- Ⓐ Κατασκευή μίας ευθείας που διέρχεται από δύο δεδομένα (ή ήδη κατασκευασμένα) σημεία (κανόνας).
- Β Κατασκευή ενός σημείου ως τομή δύο δεδομένων (ή ήδη κατασκευασμένων) ευθειών, εφ’ όσον αυτές τέμνονται.
- Γ Κατασκευή ενός κύκλου με κέντρο ένα δεδομένο (ή ήδη κατασκευασμένο) σημείο, ο οποίος διέρχεται από ένα άλλο δεδομένο (ή ήδη κατασκευασμένο) σημείο (διαβήτης).

Ευκλείδεια γεωμετρική κατασκευή

- ⦿ Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει δύο δεδομένα (ή ήδη κατασκευασμένα) σημεία.
- ⦿ Κατασκευή σημείων ως τομή μεταξύ ενός δεδομένου (ή ήδη κατασκευασμένου) κύκλου και μίας δεδομένης (ή ήδη κατασκευασμένης) ευθείας, εφ' όσον τέμνονται ή εφάπτονται.
- ⦿ Κατασκευή σημείων ως τομή μεταξύ δύο δεδομένων (ή ήδη κατασκευασμένων) κύκλων, εφ' όσον τέμνονται ή εφάπτονται.

Τα εργαλεία της Ευκλείδειας γεωμετρικής κατασκευής

Ο κανόνας και ο διαβήτης που αντιστοιχούν στα εργαλεία Ευκλείδειων γεωμετρικών κατασκευών έχουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

- Ο κανόνας δεν έχει καθόλου διακεκριμένα σημεία επάνω του. Ειδικότερα δεν έχει κάποια μονάδα μήκους.
- Ο διαβήτης είναι “ασταθής”: όταν σηκωθεί από το χαρτί κλείνει. Έτσι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να γίνει αντιγραφή ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μία άλλη θέση.

Άλλα είδη γεωμετρικών κατασκευών

Υπάρχουν και άλλα είδη γεωμετρικών κατασκευών, που επιτρέπουν διαφορετικά βήματα, τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικά εργαλεία.

Ο κανόνας μπορεί να έχει ένα ή δύο διακεκριμένα σημεία. Ο διαβήτης μπορεί να είναι “σταθερός”, δηλαδή να ανοίγει σε μία μόνο θέση.

Αλλά οι κλασικές Ευκλείδειες γεωμετρικές κατασκευές γίνονται μόνο με τα βήματα που περιγράψαμε.

Τα λεγόμενα “άλυτα” προβλήματα των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών είναι προβλήματα κατασκευής που δεν είχαν λύση με αυτά τα βήματα.

Βασικές κατασκευές

Στη συνέχεια, θεωρούμε γνωστές κάποιες βασικές κατασκευές, τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιούμε χωρίς να αναφέρουμε ρητά όλα τα βήματα της κατασκευής. Αυτές είναι οι ακόλουθες.

- Ⓐ Κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.
- Β Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος ίσου με δοθέν ευθύγραμμο τμήμα σε δοθείσα ημιευθεία.
- Υ Κατασκευή του μέσου δοθέντος ευθύγραμμου τμήματος.

Βασικές κατασκευές

- ⦿ Κατασκευή κάθετης από δοθέν σημείο προς δοθείσα ευθεία.
- ⦿ Κατασκευή ευθείας από δοθέν σημείο, παράλληλης προς δοθείσα ευθεία.
- ⦿ Κατασκευή γωνίας ίσης προς δοθείσα γωνία, σε δοθέν ημιεπίπεδο.

Πολυπλοκότητα κατασκευών

Εάν μας ενδιαφέρει η πολυπλοκότητα της κατασκευής, δηλαδή ο αριθμός βημάτων που απαιτούνται για μία κατασκευή, μπορεί να είναι προτιμότερο να μην χρησιμοποιήσουμε πιο βασικές κατασκευές, αλλά να κάνουμε την κατασκευή εξ αρχής.

Για παράδειγμα, η κατασκευή παράλληλης ευθείας από σημείο προς ευθεία, μπορεί να αναχθεί στην κατασκευή δύο κάθετων ευθειών. Η κατασκευή των δύο κάθετων ευθειών απαιτεί 13 θεμελιώδεις κατασκευές. Όμως είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε μία ευθεία παράλληλη προς δοθείσα με 6 μόνον θεμελιώδεις κατασκευές.

Κατασκευή παράλληλης ευθείας

Δίδεται ευθεία ε , σημείο P εκτός της ε και σημείο Q στην ε . Τα 6 βήματα για την κατασκευή ευθείας που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη στην ε είναι τα ακόλουθα.

Συμβολίζουμε $Q(P)$ τον κύκλο με κέντρο Q που διέρχεται από το P . Κατασκευάζουμε τον κύκλο $Q(P)$, (1). Το σημείο τομής του $Q(P)$ με την ε το ονομάζουμε S , (2). Κατασκευάζουμε τους κύκλους $S(Q)$, (3), και $P(Q)$, (4). Αυτοί τέμνονται στο Q και σε ένα δεύτερο σημείο που το ονομάζουμε T , (5). Η ευθεία PT , (6), είναι παράλληλη προς την ε .

Σχεδιάστε τα βήματα της προηγούμενης κατασκευής.

Ο ευσταθής διαβήτης (divider)

Η βασική κατασκευή (β') δείχνει ότι χρήση ασταθούς διαβήτη δεν αποτελεί περιορισμό. Μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο με δοθέν σημείο C ως κέντρο και ακτίνα ίση προς δοθέν ευθύγραμμο τμήμα AB .

Κατασκευάζουμε διαδοχικά τον κύκλο $C(A)$, τον κύκλο $A(C)$ και το σημείο Q στο οποίο τέμνονται την ευθεία AQ , τον κύκλο $A(B)$ και το σημείο R στο οποίο τέμνονται την ευθεία CQ , τον κύκλο $Q(R)$ και το σημείο P στο οποίο τέμνονται. Ο ζητούμενος κύκλος είναι ο $C(P)$.

Σχεδιάστε τα βήματα της προηγούμενης κατασκευής.

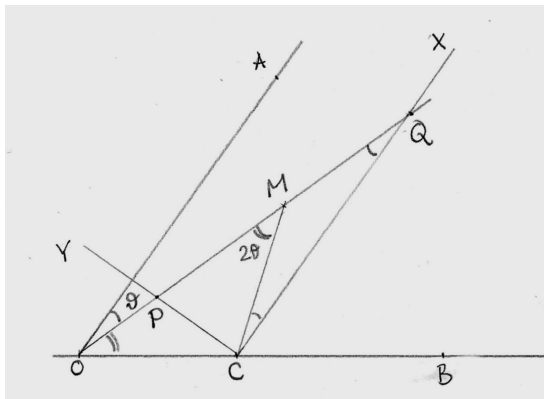
Ένα “άλυτο” πρόβλημα: Τριχοτόμηση γωνίας

Θα δείξουμε ότι η διαίρεση μίας οποιασδήποτε γωνίας σε τρία ίσα μέρη είναι δυνατή εάν χρησιμοποιήσουμε αντί του Ευκλείδειου κανόνα, έναν κανόνα με δύο διακεκριμένα σημεία.

Θεωρούμε κανόνα στον οποίο υπάρχουν δύο σημεία P , Q . Συμβολίζουμε a το μισό της απόστασης μεταξύ P και Q .

Δίδεται γωνία $\angle AOB$. Στην πλευρά OB κατασκευάζουμε σημείο C τέτοιο ώστε $|OC| = a$. Από το C κατασκευάζουμε ευθεία CY κάθετη προς την OA , και ευθεία CX παράλληλη προς την OA .

Τριχοτόμηση γωνίας



Τοποθετούμε τον κανόνα έτσι ώστε το σημείο P να βρίσκεται στην CY , το σημείο Q να βρίσκεται στην CX και ο κανόνας να διέρχεται από το O , (αυτή η διαδικασία ονομάζεται νεύση).

Τριχοτόμηση γωνίας

Θα δείξουμε ότι η γωνία $\vartheta = \angle AOQ$ είναι ίση με το εν τρίτο της $\angle AOB$.

Κατασκευάζουμε το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος PQ . CM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου PCQ , άρα είναι ίσο με MQ και με OC .

Η γωνία $\angle OQC$ είναι ίση με την $\angle AOQ$, ως εντός εναλλάξ. Το τρίγωνο QCM είναι ισοσκελές, άρα $\angle MCQ = \angle MQC = \vartheta$. Η γωνία $\angle OMC = 2\vartheta$ ως εξωτερική του τριγώνου QMC . Το τρίγωνο MOC είναι ισοσκελές, άρα $\angle MOC = 2\vartheta$. Συνεπώς $\angle AOB = 3\vartheta$.

Βιβλιογραφία

Djorić, M., Janičić, P., (2004) Constructions, instructions, interactions. Teaching Mathematics and its Applications, 23 (2).

Κουρουνιώτης, Χ., (2023) Προσωρινές Σημειώσεις μαθήματος MEM203 Ευκλείδεια Γεωμετρία και η Διδακτική της. Πανεπιστήμιο Κρήτης.
<http://users.math.uoc.gr/~chrisk/Euclidean2023-h.pdf>