

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 3.5

Η δομή της απόδειξης

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Η τυπική απόδειξη

Θα δούμε ένα μοντέλο της δομής της παραγωγικής απόδειξης στη Γεωμετρία, και την αξιοποίησή του στη διδασκαλία της απόδειξης, όπως παρουσιάζεται από τους M.Miyazaki, T.Fujita και K.Jones.

Ως παραγωγική απόδειξη, οι ερευνητές θεωρούν

“ένα κατάλληλο επιχείρημα που υποστηρίζεται από βάσιμο συλλογισμό”.

Τα προφανή ερωτήματα είναι:

- Τί είναι κατάλληλο επιχείρημα;
- Τί είναι βάσιμος συλλογισμός;

Απόδειξη και κατανόηση

Μία στενή οπτική της απόδειξης, ως κυρίως μία τυπική παραγωγή, δεν αντικατοπτρίζει τη μαθηματική πρακτική, ούτε προσφέρει τις περισσότερες δυνατότητες ανάπτυξης της κατανόησης στα Μαθηματικά.

Οι ερευνητές εξετάζουν την εξέλιξη της κατανόησης της δομής της παραγωγικής απόδειξης από μαθήτριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Έρευνες έχουν δείξει ότι η κατανόηση της δομής της απόδειξης είναι απαραίτητη για να μπορέσουν οι μαθήτριες να κατασκευάσουν τις δικές τους αποδείξεις.

Ερευνητικά ερωτήματα

Η έρευνα επικεντρώνεται σε δύο ζητήματα:

Γιατί κάποιες μαθήτριες δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα κατάλληλα αποτελέσματα για να αιτιολογήσουν τα ενδιάμεσα βήματα μίας απόδειξης;

Γιατί σε κάποιες περιπτώσεις δέχονται αποδείξεις που είναι λογικά κυκλικές (οδηγούν σε φαύλο κύκλο);

Στοιχεία μίας απόδειξης

Οι ερευνητές θεωρούν ότι μία απόδειξη αποτελείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

- **Ατομικές προτάσεις** (singular propositions): προτάσεις που αποδίδουν μία ιδιότητα σε ένα αντικείμενο: τέτοιες είναι οι υποθέσεις, τα συμπεράσματα και οι ενδιάμεσες προτάσεις.
- **Καθολικές προτάσεις** (universal propositions): προτάσεις που αποδίδουν μία ιδιότητα συνολικά σε ένα είδος αντικειμένων: τέτοιες είναι οι ορισμοί, τα θεωρήματα κλπ.
- Κατάλληλους συνδέσμους μεταξύ των ατομικών και καθολικών προτάσεων.

Είδη συλλογισμών στην απόδειξη

Από την άποψη της Λογικής, χρειάζονται δύο τουλάχιστον είδη συλλογισμών που συνδέουν τις προτάσεις:

- Η **καθολική υποστασιοποίηση** (universal instantiation) που συμπεραίνει μία ατομική πρόταση από μία καθολική πρόταση.
- Ο **υποθετικός συλλογισμός** (hypothetical syllogism) που συνδέει λογικά ατομικές προτάσεις, για να οδηγήσει από τις υποθέσεις στις ενδιάμεσες προτάσεις και τα συμπεράσματα.

Αυτά τα δύο είδη παραγωγικού συλλογισμού συνυφαίνονται σαν το στημόνι και το υφάδι, για να δώσουν θεμιτούς λόγους για την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων.

Η δομή μίας απόδειξης

Ας δούμε το παράδειγμα της απόδειξης της Πρότασης

Πρόταση

Εάν στο τρίγωνο ABC , $AB = AC$, τότε $\angle ABC = \angle ACB$.

Η δομή μίας απόδειξης

Έστω AD η διχοτόμος της γωνίας $\angle BAC$. Στα τρίγωνα ABD, ACD $AB = AC$ $AD = AD$ $\angle BAD = \angle CAD$	υπόθεση ανακλαστική ιδιότητα ορισμός διχοτόμου
Στα τρίγωνα ABD, ACD, δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία είναι ίσες, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα	καθολική υποστασιοποίηση του 1ου κριτηρίου ισότητας τριγώνων

Η δομή μίας απόδειξης

Στα ίσα τρίγωνα ABD , ACD , οι εσωτερικές γωνίες $\angle ABD$ και $\angle ACD$ είναι ίσες	καθολική υποστασιοποίηση της καθολικής πρότασης: Σε ίσα τρίγωνα οι αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες είναι ίσες
Αφού τα τρίγωνα ABD και ACD είναι ίσα, οι γωνίες $\angle ABD$ $\angle ACD$ είναι επίσης ίσες	υποθετικός συλλογισμός

Η μάθηση της απόδειξης

Στα αρχικά στάδια της διδασκαλίας της απόδειξης, ο μαθηματικός συλλογισμός δεν είναι τυπικός: μαθαίνεται μέσα από δραστηριότητες στις οποίες απαιτείται να δοθούν εξηγήσεις.

Για να γίνει αυτή η διαδικασία πιο τυπική, οι μαθήτριες μαθαίνουν ότι μία απόδειξη είναι μία μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων από δεδομένες υποθέσεις, χρησιμοποιώντας ορισμούς και θεωρήματα.

Η διδασκαλία της δομής της απόδειξης βελτιώνει τη μάθηση αποδείξεων και μακροπρόθεσμα την ικανότητα κατανόησης και κατασκευής αποδείξεων.

Επίπεδα κατανόησης της απόδειξης

Οι M.Miyazaki, T.Fujita και K.Jones διακρίνουν 4 επίπεδα στην κατανόηση της απόδειξης.

Προ-δομικό: Οι μαθήτριες αντιλαμβάνονται την απόδειξη σαν ένα πλέγμα συμβολικών αντικειμένων, χωρίς νόημα.

Δεν διακρίνουν στην απόδειξη τις ατομικές προτάσεις που προκύπτουν από καθολικές προτάσεις (θεωρήματα) ούτε το ρόλο του υποθετικού συλλογισμού για τη σύνδεση των ατομικών προτάσεων.

Επίπεδα κατανόησης της απόδειξης

Μερικά δομικό – στοιχειακό: Η μαθήτρια επικεντρώνει στα στοιχεία της απόδειξης, αλλά ακόμα δεν αντιλαμβάνεται τις λογικές σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία από την υπόθεση προς τα συμπεράσματα.

Μερικά δομικό – σχεσιακό: Η μαθήτρια αρχίζει να αντιλαμβάνεται τα δύο είδη συλλογισμού –χωρίς βεβαίως να χρησιμοποιεί τους αντίστοιχους όρους

Η κατανόηση της καθολικής υποστασιοποίησης

Όταν μία μαθήτρια που κατανοεί την καθολική υποστασιοποίηση ερωτηθεί:

Στα τρίγωνα ABD και ACD , όπου $AB = AC$, τι άλλες προτάσεις απαιτούνται για να αποδείξω ότι τα τρίγωνα είναι ίσα;

θα απαντήσει κάτι σαν

Για να χρησιμοποιήσω το κριτήριο ισότητας, χρειάζεται να έχω $\angle BAD = \angle CAD$ και $\angle ABD = \angle ACD$.

Ανεξαρτησία των δύο συλλογισμών

Η κατανόηση των δύο συλλογισμών είναι ανεξάρτητη:

Η καθολική υποστασιοποίηση αναφέρεται στην αναζήτηση αιτίων στα βήματα της απόδειξης.

Ο υποθετικός συλλογισμός συνδέει τα βήματα του παραγωγικού συλλογισμού.

Μία μαθήτρια μπορεί να αντιλαμβάνεται μόνο το ένα ή το άλλο είδος, πριν φτάσει στο επίπεδο να αντιλαμβάνεται και τα δύο.

Επίπεδα κατανόησης της απόδειξης

Ολικά δομικό: Η μαθήτρια κατανοεί την απόδειξη ως όλο. Οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα συνδέονται λογικά, μέσω των δύο συλλογισμών, σε ένα ενιαίο επιχείρημα.

Η μαθήτρια κατανοεί διδαγμένες αποδείξεις, αλλά επιπλέον μπορεί να σχεδιάσει και να κατασκευάσει δικές της αποδείξεις.

Το πλαίσιο κατανόησης της απόδειξης

Αυτό το πλαίσιο μπορεί να συμβάλει στη σχεδίαση μαθησιακών ακολουθιών για τη διδασκαλία και μάθηση της απόδειξης στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.



Βιβλιογραφία

Miyazaki, M., Fujita, T., Jones, K.,(2017) Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*. 94: 223 – 239.