

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 3.3

Εξέταση απόδειξης από διάγραμμα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Καλλιεργώντας την εμπειρική εξέταση

Ο Κ. Komatsu χρησιμοποιεί δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τις μαθήτριες να εξετάσουν κριτικά κάποιες προτάσεις ή τις αποδείξεις τους, με σκοπό να τις βελτιώσουν. Αυτή η έρευνα χρησιμοποιεί το “πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα”.

Ένα “πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα” είναι ένα πρόβλημα που ζητά να αποδειχθεί μία πρόταση που αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο διάγραμμα με σύμβολα.

Το “πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα”

Η διατύπωση του προβλήματος αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο η πρόταση ή η απόδειξη να ισχύει για κάποια γενικότερη κλάση διαγραμμάτων, στην οποία ανήκει το συγκεκριμένο.

Το άλλο χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ότι οι υποθέσεις μπορεί να είναι ασαφείς, επειδή μπορεί να υπάρχουν κρυμμένες υποθέσεις στο διάγραμμα.

Αυτό το χαρακτηριστικό επιτρέπει στις μαθήτριες να εξετάσουν εμπειρικά τα προβλήματα, και να αναδιατυπώσουν τις προτάσεις χρησιμοποιώντας διαφορετικά διαγράμματα.

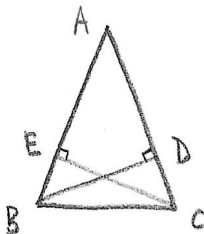
Παράδειγμα προβλήματος απόδειξης με διάγραμμα

Πρόβλημα

Από τις κορυφές B και C ενός ισοσκελούς τριγώνου, όπως στο διάγραμμα, σχεδιάστε κάθετες BD και CE προς τις AC και AB αντίστοιχα.

Δείξτε ότι $BD = CE$.

Παράδειγμα προβλήματος απόδειξης με διάγραμμα

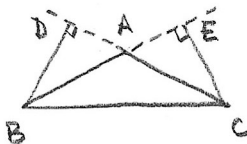


Στο διάγραμμα υπάρχει η κρυμμένη υπόθεση ότι οι κάθετες BD και CE τέμνουν τις απέναντι πλευρές του τριγώνου.

Ο ρόλος της καθηγήτριας

Για να προχωρήσει η εμπειρική εξέταση, χρειάζεται να γίνουν κατάλληλες παρεμβάσεις από την καθηγήτρια, ώστε να συνεχίσουν οι μαθήτριες την εξερεύνηση μετά που έχουν δώσει την απόδειξη.

Σε αυτό το πρόβλημα η καθηγήτρια μπορεί να ζητήσει να σχεδιάσουν οι μαθήτριες δικά τους διαγράμματα, ή να σχεδιάσει εκείνη κατάλληλα, ώστε να αναδειχθούν οι κρυμμένες υποθέσεις.



Ο ρόλος της καθηγήτριας

Επίσης πρέπει να κατευθύνει τις μαθήτριες να εξετάσουν τις προτάσεις και τις αποδείξεις υπό την οπτική των νέων διαγραμμάτων.

Τέλος να επιλέξει μαθήτριες για να παρουσιάσουν τα ευρήματά τους για συζήτηση στην τάξη.

2ο Πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα

Πρόβλημα

Δύο κύκλοι (K, KA) και (L, LA) τέμνονται στα σημεία A και B , όπως στο διάγραμμα.

Η ευθεία ε διέρχεται από το B και τέμνει τους κύκλους (K, KA) και (L, LA) σε σημεία C και D αντίστοιχα. Παρόμοια, η ευθεία δ διέρχεται από το B και τέμνει τους κύκλους (K, KA) και (L, LA) σε σημεία E και F αντίστοιχα.

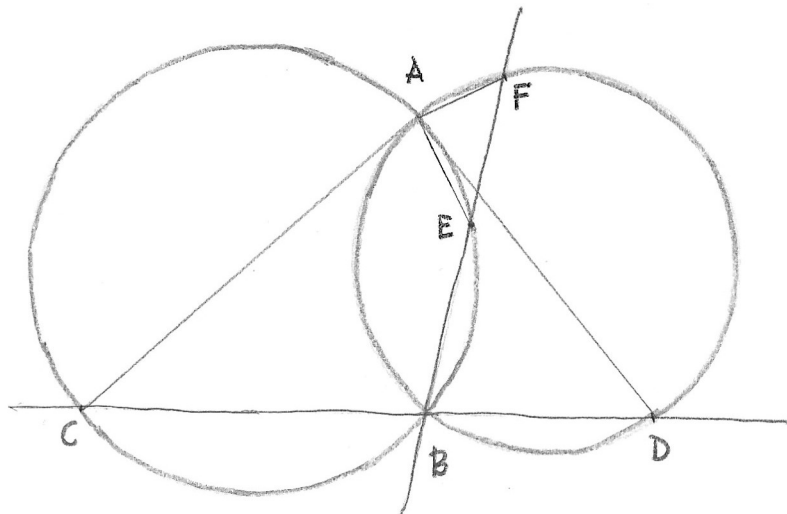
Δείξτε ότι τα τρίγωνα ACD και AEF είναι όμοια.

2ο Πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα

Το πρόβλημα στο συγκεκριμένο διάγραμμα λύνεται χρησιμοποιώντας την ισότητα γωνιών που βαίνουν σε ίσα τόξα.

Αλλά για τη λύση στη γενικότερη περίπτωση, απαιτείται μία διαφορετική αιτιολόγηση.

2ο Πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα



Βιβλιογραφία

Komatsu, K., Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics*. 96, 2017.