

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 2.6

Η γωνία παραλληλισμού

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Μή Ευκλείδεια Γεωμετρία

Στις αρχές του 19ου αιώνα, το φιλοσοφικό κλίμα είχε αλλάξει, και επέτρεψε να αντιστραφεί το ερώτημα της αναζήτησης απόδειξης του αιτήματος των παραλλήλων.

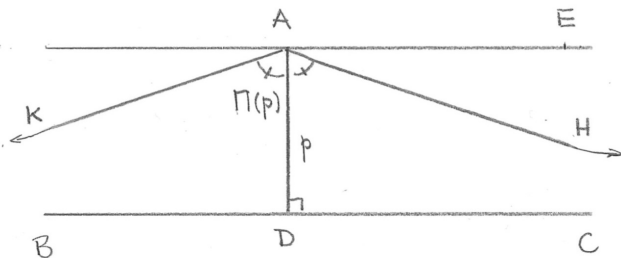
Ο κορυφαίος μαθηματικός της εποχής, Gauss και δύο νέοι μαθηματικοί, ο Nikolai Lobachevsky και ο Janos Bolyai, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, εξέτασαν τις συνέπειες της άρνησης του αιτήματος των παραλλήλων όχι για να οδηγηθούν σε μία αντίφαση, αλλά για να δουν τί ιδιότητες έχει μία γεωμετρία στην οποία μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία ευθείες από ένα σημείο, που να μην έχουν κοινό σημείο με μία άλλη ευθεία με την οποία βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Παράλληλες στη μή Ευκλείδεια Γεωμετρία

Θεωρούμε σημείο A και ευθεία BC που δεν διέρχεται από το A . Το πρώτο συμπέρασμα που προκύπτει από αυτήν την προσέγγιση είναι ότι οι ευθείες από το A διαιρούνται σε αυτές που τέμνουν την ευθεία BC και αυτές που δεν την τέμνουν.

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάθετη από το A προς την ευθεία BC , η οποία την τέμνει στο D . Γνωρίζουμε επίσης ότι η ευθεία AE που σχηματίζει ορθή γωνία με την κάθετη AD , δεν τέμνει την BC .

Παράλληλες στη μή Ευκλείδεια Γεωμετρία



Σχήμα: Παράλληλες στη μή Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Παράλληλες στη μή Ευκλείδεια Γεωμετρία

Από επιχειρήματα συνέχειας, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακριβώς μία ημιευθεία AH στο εσωτερικό της γωνίας $\angle DAE$, τέτοια ώστε κάθε ημιευθεία στη γωνία $\angle DAH$ τέμνει την BC , ενώ κάθε ημιευθεία στη γωνία $\angle EAH$ δεν τέμνει την BC .

Αυτή την ευθεία AH ονομάζουμε **ασύμπτωτη παράλληλη** από το A προς την BC . Τις ευθείες που αντιστοιχούν σε ημιευθείες στη γωνία $\angle EAH$ τις ονομάζουμε **υπερπαράλληλες**. Στην άλλη μεριά της AD υπάρχει άλλη μία ημιευθεία AK ασύμπτωτη παράλληλη προς την BC

Γωνία παραλληλισμού

Η γωνία $\angle DAH$ εξαρτάται από την απόσταση από το A στην ευθεία BC . Εάν $|AD| = p$, συμβολίζουμε

$$\Pi(p) = \angle DAH,$$

και την ονομάζουμε **γωνία παραλληλισμού**.

Εάν $\Pi(p) = \pi/2$, τότε καμία ευθεία διαφορετική από την AE δεν τέμνει την BC .

Εάν $\Pi(p) < \pi/2$, τότε στην άλλη μεριά της AD η ημιευθεία AK που σχηματίζει ίση γωνία $\angle DAK = \Pi(p)$ είναι επίσης ασύμπτωτη παράλληλη προς την BC .

Γωνία παραλληλισμού

Εάν $\Pi(p) = \pi/2$ για ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους p , τότε είναι το ίδιο για κάθε ευθύγραμμο τμήμα, και έχουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Εάν $\Pi(p) < \pi/2$ για κάποιο ευθύγραμμο τμήμα μήκους p , τότε η ίδια ανισότητα ισχύει για κάθε ευθύγραμμο τμήμα, οποιουδήποτε μήκους $p > 0$.

Ο Lobachevsky ονόμασε αυτή την περίπτωση *Φανταστική Γεωμετρία*, και μελέτησε τις συνέπειες αυτής της υπόθεσης.

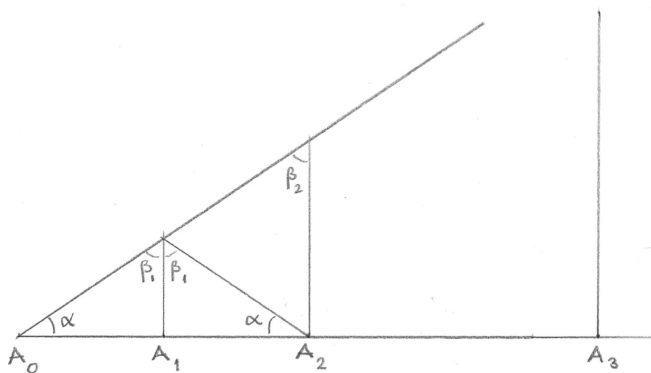
Γωνία παραλληλισμού

Θα δείξουμε ότι η γωνία παραλληλισμού μπορεί να πάρει κάθε τιμή μεταξύ 0 και $1\mathcal{L}$.

Θεώρημα

Για κάθε γωνία α , $0 < \alpha < 1\mathcal{L}$, υπάρχει p τέτοιο ώστε $\Pi(p) = \alpha$.

Γωνία παραλληλισμού



Σχήμα: Γωνία παραλληλισμού.

Υπερβολική Γεωμετρία

Ο Lobachevsky υπολόγισε τη συνάρτηση Π και ανακάλυψε πολλές ιδιότητες αυτής της Γεωμετρίας, που αργότερα ονομάστηκε Γεωμετρία Lobachevsky ή Υπερβολική Γεωμετρία.

Μετά τα μέσα του 19ου αιώνα ανακαλύφθηκαν διάφορα μοντέλα αυτής της Γεωμετρίας (όπως το επίπεδο Klein), που έδειξαν ότι η Υπερβολική Γεωμετρία δεν οδηγεί σε αντιφάσεις.

Αυτά τα μοντέλα διευκόλυναν τη μελέτη της Υπερβολικής Γεωμετρίας, η οποία έχει εφαρμογές σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών και των φυσικών επιστημών.

Βιβλιογραφία

Bonola, R., Non-Euclidean Geometry, with a supplement containing “The theory of parallels” by Nicholas Lobachevski and “The science of absolute space” by John Bolyai. 1955, Dover.

Κουρουნიώτης, Χ., Προσωρινές Σημειώσεις μαθήματος MEM203 Ευκλείδεια Γεωμετρία και η Διδακτική της. Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2023. <http://users.math.uoc.gr/~chrisk/Euclidean2023-h.pdf>

Στράντζαλος, Χ. Η εξέλιξη των ευκλείδειων και των μη ευκλείδειων γεωμετριών (μέρος πρώτο), 1987, Εκδόσεις Καρδαμίτσα.