

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 2.5

Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

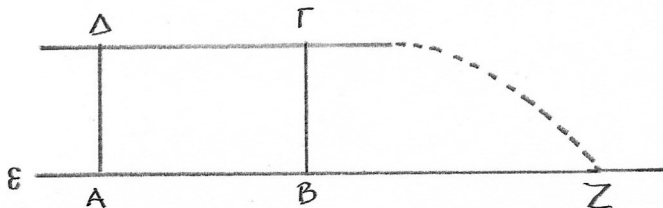
Το τετράπλευρο Saccheri

Το τετράπλευρο Saccheri είναι ένα τετράπλευρο που έχει δύο ορθές γωνίες και τις απέναντι κάθετες πλευρές ίσες. Μελετήθηκε ως μέρος των προσπαθειών απόδειξης του αιτήματος των παραλλήλων.

Θεώρημα (Τετράπλευρο Saccheri)

Θεωρούμε δύο σημεία A και B στην ευθεία ε , και ίσα ευθύγραμμα τμήματα AD και BC , κάθετα στην ίδια μεριά της ε . Τότε οι γωνίες $\angle ADC$ και $\angle BCD$ είναι ίσες, και η ευθεία DC είναι παράλληλη προς την ε .

Το τετράπλευρο Saccheri



Σχήμα: Το τετράπλευρο Saccheri.

Ο Saccheri διέκρινε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- I Οι γωνίες $\angle ADC$ και $\angle BCD$ είναι ίσες με μία ορθή.
- II Οι γωνίες $\angle ADC$ και $\angle BCD$ είναι αμβλείες.
- III Οι γωνίες $\angle ADC$ και $\angle BCD$ είναι οξείες.

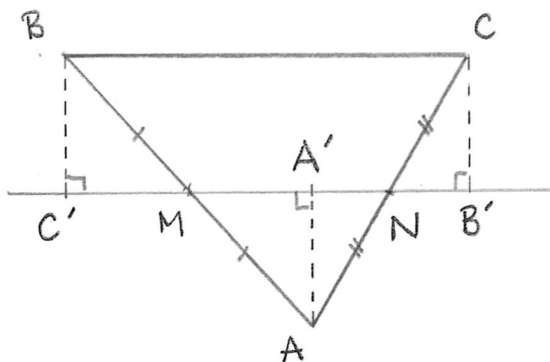
Στόχος του ήταν να αποκλείσει τις περιπτώσεις II και III, ώστε να δείξει ότι ισχύει η I.

Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου

Οι περιπτώσεις του τετράπλευρου Saccheri σχετίζονται με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου:

- I Εάν οι γωνίες $\angle ADC$ και $\angle BCD$ είναι ίσες με μία ορθή, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2L .
- II Εάν οι γωνίες $\angle ADC$ και $\angle BCD$ είναι αμβλείες, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 2L .
- III Οι γωνίες $\angle ADC$ και $\angle BCD$ είναι οξείες, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 2L .

Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου



Σχῆμα: Τετράπλευρο Saccheri και άθροισμα γωνιών τριγώνου.

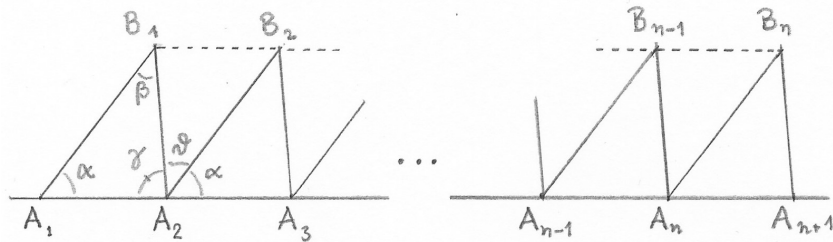
Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου

Θεώρημα (Legendre)

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από ή ίσο με δύο ορθές.

Ο Legendre απέδειξε το Θεώρημα χρησιμοποιώντας αποτελέσματα που βασίζονται στα αξιώματα του Hilbert των ομάδων I, II, IV και V. Ειδικότερα χρησιμοποιεί το Αξίωμα Εύδοξου - Αρχιμήδη.

Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου



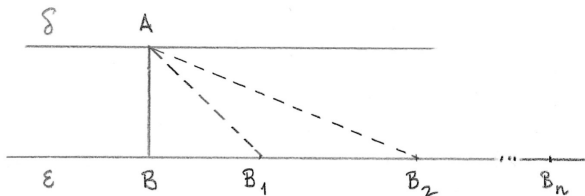
Σχῆμα: Εάν το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι $> 2L$ οδηγούμαστε σε άτοπο.

Η υπόθεση των δύο ορθών

Τα αποτελέσματα του Saccheri και του Legendre οδηγούν στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές εάν και μόνον εάν ισχύει το 5ο αίτημα.



Σχῆμα: Η υπόθεση των δύο ορθών.

Έλλειμμα τριγώνου

Εάν ένα τρίγωνο ABC έχει γωνίες μέτρου α , β και γ , ονομάζουμε **έλλειμμα** του τριγώνου τη διαφορά

$$\delta(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Έχουμε δείξει ότι $\delta(ABC) \geq 0$. Θα αποδείξουμε ότι το έλλειμμα έχει την αθροιστική ιδιότητα.

Λήμμα

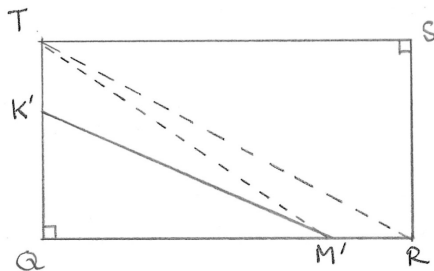
Εάν ABC είναι τρίγωνο και D σημείο στην πλευρά BC , τότε

$$\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(ADC).$$

Έλλειμμα τριγώνου

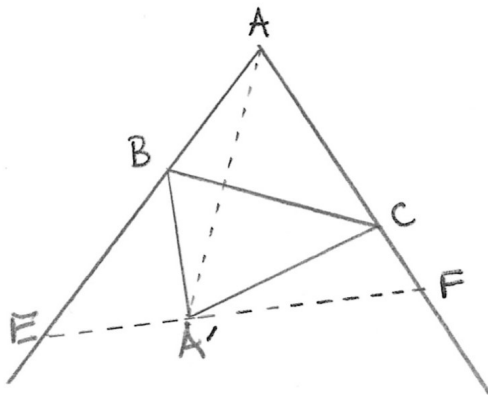
Πρόταση

Εάν υπάρχει τρίγωνο με άθροισμα εσωτερικών γωνιών ίσο με δύο ορθές, τότε κάθε τρίγωνο έχει άθροισμα εσωτερικών γωνιών ίσο με δύο ορθές.



Σχῆμα: Το έλλειμμα ορθογωνίου τριγώνου.

Η τελευταία προσπάθεια του Legendre



Σχῆμα: Η προσπάθεια του Legendre.

Η απόσταση σημείου στην απέναντι πλευρά γωνίας

Λήμμα

Έστω $ABCD$ τετράπλευρο, με $\angle A = \angle B = 1\text{L}$. Εάν $\angle C > \angle D$, τότε $AD > BC$.

Λήμμα

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABC , $\angle B = 1\text{L}$, M μέσο της υποτείνουσας, και MK κάθετο στην AB . Τότε $2MK \leq BC$.

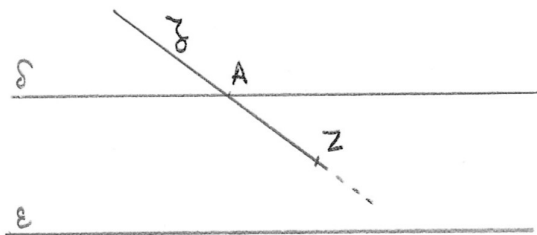
Πρόταση

Εάν οι ευθείες ε και δ τέμνονται, τότε η απόσταση ανάμεσα σε ένα σημείο της δ και την ε δεν είναι φραγμένη.

Η απόσταση ευθείας από σημεία σε παράλληλη ευθεία

Θεώρημα

Εάν η απόσταση μίας ευθείας από τα σημεία μίας παράλληλης ευθείας είναι φραγμένη, τότε ισχύει το αξίωμα Playfair.



Σχήμα: Η απόσταση ευθείας από σημεία σε παράλληλη ευθεία.

Βιβλιογραφία

Κουρουνιώτης, Χ., Προσωρινές Σημειώσεις μαθήματος MEM203
Ευκλείδεια Γεωμετρία και η Διδακτική της. Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2023.
<http://users.math.uoc.gr/~chrisk/Euclidean2023-h.pdf>

Στράντζαλος, Χ. Η εξέλιξη των ευκλείδειων και των μη ευκλείδειων
γεωμετριών (μέρος πρώτο), 1987, Εκδόσεις Καρδαμίτσα.